Exercice 8 :

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \cos^3 x$,
2. $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$,
3. $f_3 : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_1(x) = \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + \frac{e^{-ix}}{2}}{2}\right)^3 \quad \text{d'après la formule d'Euler}\\
&= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{8} \quad \text{d'après le binôme de Newton}\\
&= \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(e^{3ix} + 3e^{ix}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left((3i)^n e^{3ix} + 3(i^n)e^{ix}\right)$. Or, $i^n = e^{in\frac{\pi}{2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_1^{(n)}(x) &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(3^n e^{i(3x+n\frac{\pi}{2})} + 3e^{i(x+n\frac{\pi}{2})}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

2. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \mathrm{Im}\,(e^{(1+i)x}$. On prouve alors par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{Im}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$. Or, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_2^{(n)}(x) &= \mathrm{Im}\left((\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} e^{(1+i)x}\right)\\
&= (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

3. f_3 est le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f_3 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Posons $h : x \mapsto x^3 + x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^{-x}$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 3x^2 + 2x \quad h''(x) = 6x + 2 \quad h'''(x) = 6 \quad \text{et } \forall k \geq 4,\ h^{(k)}(x) = 0$$

De même, on montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$.
Soit $n \geq 3$, on utilise la formule de Leibniz.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_3^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\\
&= \binom{n}{0}h^0(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}h'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}h''(x)g^{(n-2)}(x) + \binom{n}{3}h'''(x)g^{(n-3)}(x) + \sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}h^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\\
&= (x^3 + x^2 + 1)(-1)^n e^{-x} + n(3x^2 + 2x)(-1)^{n-1}e^{-x} + (6x + 2)\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(-1)^{n-3}e^{-x}\\
&= (-1)^n e^{-x}\left(x^3 + (1 - 3n)x^2 + (3n^2 - 5n)x + 1 + n(n-1)(3-n)\right)
\end{aligned}$$

On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.