Correction : chapitre 18 - exercice 10

Exercice 10 :

Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

Correction :

✎ *Cet exercice est un grand classique.*

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k « La porte s'ouvre exactement à la k-ième tentative ».
On a $A_k = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
✎ *Si la porte s'ouvre à la k-ième tentative, cela signifie que la porte ne s'est pas ouverte avant.*
Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \end{aligned}$$

✎ *Sachant $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{i-1}}$, on a déjà testé $i-1$ clés, il n'y a donc plus que $n-(i-1)$ clés à tester. De plus, parmi ces $n-i+1$ clés, il y a une clé qui permet d'ouvrir la porte et donc $n-i$ clés qui n'ouvrent pas la porte. Ainsi $P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{i-1}}}(\overline{A_i}) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.*
Pour le dernier terme, on tire la bonne clé, il n'y a donc qu'une possibilité.
Donc :

$$P(A_k) = \frac{1}{n}.$$

✎ *Cela était prévisible car cela revient à tirer au sort le numéro de la tentative à laquelle la porte s'ouvre. Or, il y a n clés donc n tentatives possibles. Ainsi, pour une tentative donnée, la probabilité que la porte s'ouvre à cette tentative vaut $\dfrac{1}{n}$.*