Exercice 15 :

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de 2/3, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.
Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) :

"le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n"

et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$
4. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n = 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, on a, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n. \end{aligned}$$
✎ *La probabilité qu'il reste sur un même sommet est $\frac{2}{3}$ donc $P(A_{n+1}|A_n) = \frac{2}{3}$, la probabilité qu'il change de sommet est $\frac{1}{6}$ donc $P(A_{n+1}|B_n) = P(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{6}$.* De même,
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(B_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n. \end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(C_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(C_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(C_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n. \end{aligned}$$
3. ✎ *Les questions suivantes ne sont plus des questions de probabilités.*
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$
Et
$$\begin{aligned} a_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - c_n) \end{aligned}$$
4. D'après la question précédente, on sait que les suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$.
De plus, sait que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n}$.

De plus d'après la question 1 : $a_n + b_n + c_n = 1$.
Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n + b_n + c_n = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b_n = a_n - \dfrac{1}{2^n} \\ c_n = a_n - \dfrac{1}{2^n} \\ 3a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} b_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \\ c_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \quad b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$