Correction : chapitre 18 - exercice 7

Exercice 7 :

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. On cherche la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. On considère une classe de n élèves, avec $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février.)

Correction :

1. L'univers Ω associé à cette expérience est : « l'ensemble des n-uplets d'éléments de $[\![1, M]\!]$.
   Ω est muni de la probabilité uniforme. On a $\text{Card}\,(\Omega) = M^n$.
   Notons A : « aucun jeton n'est tiré plus d'une fois »
   Ainsi, A correspond à l'ensemble des n listes d'éléments distincts de $[\![1, M]\!]$.
   On a donc $\text{Card}\,(A) = \frac{M!}{(M-n)!}$.
   On obtient ainsi :
   $$P(A) = \frac{M!}{(M-n)!M^n}.$$
2. Les jetons sont ici remplacés par les étudiants et les numéros par les 365 jours de l'année.
   Notons B : « au moins deux élèves ont leur anniversaire le même jour ». On a $\overline{B}$: « aucun étudiant a son anniversaire le même jour qu'un autre ».
   D'après la question précédente :
   $$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$