Correction : chapitre 19 - exercice 27

Exercice 27 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $u \in mathcalL(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ si et seulement si n est pair.

Correction :

- Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.
  Alors d'après le théorème du rang :
  $$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = 2\operatorname{rg} u$$
  donc n est pair.
- Réciproquement, supposons que n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
  Si $p = 0$ l'endomorphisme nul convient.
  Supposons désormais $p > 0$.
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{2p})$ une base de E.
  Soit u l'unique application de $\mathcal{L}(E)$ telle que :
  $$\forall k \in [\![1, p]\!],\ u(e_k) = 0$$
  $$\forall k \in [\![p+1, n]\!],\ u(e_k) = e_{k-p}$$
  Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Donc :
  $$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{Vect}(0, \dots, 0, e_1, \dots, e_p) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$
  De plus :
  $$\forall k \in [\![1, p]\!],\ e_k \in ker u.$$
  Donc, comme $\ker u$ est un espace vectoriel :
  $$\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u.$$
  D'après le théorème du rang : $\dim(E) = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u)$. Donc $\dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(E) - \operatorname{rg} u$.
  Or $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\operatorname{Im} u$. Ainsi $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = p$.
  Donc $\dim(\operatorname{Ker} u) = n - p = p$.
  Or $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u$ et $\dim(\operatorname{Ker} u) = p = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
  Donc :
  $$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \operatorname{Im} u.$$
  Ainsi u convient.