Correction : chapitre 1 - exercice 41

Exercice 41 :

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. 1, z et z^2 forment un triangle rectangle,
2. z, $\frac{1}{z}$, $-i$ sont alignés.

Correction :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points $1, z, z^2$ sont deux à deux distincts ssi $z \notin \{-1, 0, 1\}$.
   On suppose désormais $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
   - 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en 1 ssi $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
     ssi $z+1 \in i\mathbb{R}$
     ssi $\mathrm{Re}\,(z+1) = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\, z + 1 = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\, z = -1$
   - 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z ssi $\dfrac{z^2-z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.
     ssi $z \in i\mathbb{R}$
     ssi $\mathrm{Re}\,(z) = 0$
   - 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 ssi $\dfrac{1-z^2}{z-z^2} \in i\mathbb{R}$
     ssi $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{z}\right) = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\left(\dfrac{(1+z)\overline{z}}{|z|^2}\right) = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\left(\overline{z} + |z|^2\right) = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\,(\overline{z}) + |z|^2 = 0$
     ssi $\mathrm{Re}\, z = -|z|^2$.

   On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   On a alors 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 ssi $x + x^2 + y^2 = 0$.
   ssi $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$
   ssi $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

   Finalement on trouve : ($\mathrm{Re}\, z = -1$ ou $\mathrm{Re}\, z = 0$ ou $\left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$) et $z \notin \{-1, 0, 1\}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont deux à deux distincts ssi $z \notin \{-i, i, 1, -1\}$.
   Supposons $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, 1, -1\}$.
   z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés ssi $\dfrac{z+i}{\frac{1}{z}+i} \in \mathbb{R}$
   ssi $\dfrac{z(z+i)}{1+zi} \in \mathbb{R}$
   ssi $\dfrac{z(z+i)(1-i\overline{z})}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}$
   ssi $\dfrac{z(z+\overline{z}+i-i|z|^2}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}$
   ssi $\dfrac{z(2\mathrm{Re}\,(z)+i-i|z|^2}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}$
   ssi $z(2\mathrm{Re}\,(z)+i-i|z|^2 \in \mathbb{R}$
   ssi $\mathrm{Im}\left(z(2\mathrm{Re}\,(z)+i-i|z|^2\right) = 0$
   On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les points sont alignés ssi $\operatorname{Im}\left((x+iy)(2x+i-i(x^2+y^2)\right)=0$.

ssi $x - x(x^2+y^2)+2xy=0$

ssi $x(1-(x^2+y^2)+2y)=0$

ssi $x=0$ ou $x^2+y^2-2y=1$

ssi $x=0$ ou $x^2+(y-1)^2=2$

ssi $\operatorname{Re} z=0$ ou $|z-i|^2=2$

ssi $\operatorname{Re} z=0$ ou $|z-i|=\sqrt{2}$

Finalement, les points sont alignés ssi $\operatorname{Re} z=0$ ou $|z-i|=\sqrt{2}$.