Exercice 19 :
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = a$ sinon, avec $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de A en fonction de a et n.

Correction :

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a \\ a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en effectuant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 1-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a-1 & a-1 & \cdots & a-1 & 1 \end{pmatrix}$$

✎ *Ces opérations sont choisies de façon à faire apparaître un maximum de zéros.*

- Si $a = 1$, alors :

  $$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  donc $\text{rg}(A) = 1$.
  ✎ *Les colonnes nulles "ne comptent pas" dans le rang, il ne reste donc qu'une colonne non nulle.*

- Si $a \neq 1$, en effectuant $C_n \leftarrow C_n - \dfrac{a}{1-a}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} C_j$, on obtient :

  $$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a & 0 \\ a-1 & a-1 & \cdots & a-1 & 1-a(n-1) \end{pmatrix}$$

  ✎ *Cette opération a été choisie de façon à se ramener à une matrice triangulaire pour laquelle le rang est facile à calculer.*
  Ainsi,

  - Si $a \neq \dfrac{-1}{n-1}$, A est une matrice équivalente à une matrice triangulaire à éléments diagonaux tous non nuls donc A est inversible ainsi :

    $$\text{rg}(A) = n.$$

  - Si $a = \dfrac{-1}{n-1}$, alors; :

    $$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a & 0 \\ a-1 & a-1 & \cdots & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Or cette matrice admet $n-1$ pivots donc :

    $$\text{rg}(A) = n-1.$$