PCSI 1 — 2020/2021

Correction : chapitre 20 - exercice 7

Exercice 7 :

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pas $u(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Prouver que u est un isomorphisme.
2. Déterminer u^{-1}.

Correction :

1.
   - Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)(1), (\lambda P + \mu Q)(2)) \\ &= (\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P(2) + \mu Q(2)) \\ &= \lambda (P(0), P(1), P(2)) + \mu (Q(0), Q(1), Q(2)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

   Ainsi, u est linéaire.

   - Soit $P \in \ker u$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Ainsi P admet au moins trois racines et $\deg P \leq 2$. Donc $P = 0$.
     Ainsi $\ker u = \{0\}$ donc u est injective.
   - ✎ *On utilise les dimensions pour éviter la preuve de surjectivité.*
     Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim R^3$, ainsi u est bijective, donc u est un isomorphisme.
2. De plus, comme $u(1) = (1, 1, 1)$, $u(X) = (0, 1, 2)$ et $u(X^2) = (0, 1, 4)$, on a :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'inverse de A. ✎ *L'inverse de A est $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$.*

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ \underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\ \underset{L}{\sim} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_n$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & 2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est un isomorphisme et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$. ✎ *Il faut maintenant passer de la matrice à l'application linéaire. On utilise la proposition 3.*

Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\dfrac{3}{2} a + 2b - \dfrac{1}{2} c \\ \dfrac{1}{2} a - b + \dfrac{1}{2} c \end{pmatrix}$$

✎ *La matrice colonne obtenue est constituée des coorconnées de $u^{-1}(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Ainsi, $$\begin{array}{rccl} u^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b,c) & \mapsto & a+\left(-\frac{3}{2}a+2b-\frac{1}{2}c\right)X+\left(\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{2}c\right)X^2 \end{array}$$