Exercice 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$.

Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.

Correction :

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_i = 1)$ car X_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$.

   Comme on tire simultanément $2r$ chaussures parmi n paires, c'est-à-dire $2n$ chaussures, on a $\text{Card}(\Omega) = \binom{2n}{2r}$.

   l'événement $(X_i = 1)$ correspond à :
   - choix de la paire i : 1 possibilité.
   - choix $2r - 2$ chaussures parmi les $2n - 2$ restantes : $\binom{2n-2}{2r-2}$

   Ainsi, $\text{Card}((X_i = 1)) = \binom{2n-2}{2r-2}$ donc :

   $$p = P(X_i = 1) = \frac{\binom{2n-2}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}} = \frac{(2n-2)!(2r)!(2n-2r)!}{(2r-2)!(2n-2r)!(2n)!} = \frac{2r(2r-1)}{2n(2n-1)} = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}.$$

   Ainsi :

   $$X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}\right)$$

   Ainsi :

   $$E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}.$$

2. On a $X = X_1 + \ldots + X_n$. Ainsi, par linéarité de l'espérance :

   $$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = \frac{r(2r-1)}{2n-1}.$$