Correction : chapitre 21 - exercice 16

Exercice 16 :

Une machine A fabrique 100 pièces dont 5% sont défectueuses. Une machine B, indépendante de A, fabrique 400 pièces dont 10% sont défectueuses. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses pour A (resp. B).

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Déterminer une valeur c pour laquelle le risque que le nombre de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Correction :

1. X (resp. Y) compte le nombre de succès lors de la répétition 100 (resp. 400) expériences de Bernoulli indépendantes chacune ayant la probabilité 0.05 (resp. 0.1) de réussir.
   Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(100, 0.05)$ et $Y \sim \mathcal{B}(400, 0.1)$
2. On a $E(Z) = E(X) + E(Y) = 100 \times 0.05 + 400 \times 0.1 = 40 + 5 = 45$. De plus, comme X et Y sont indépendantes

$$\begin{aligned}
V(Z) &= V(X) + V(Y) \\
&= 100 \times 0.05 \times (1 - 0.05) + 400 \times 0.1 \times (1 - 0.1) \\
&= 5 \times 0.95 + 40 \times 0.9 \\
&= 40.75
\end{aligned}$$

3. Soit $c \in \mathbb{R}$. On cherche c tel que $P(Z \geq c) \leq 0.05$.
   On a :

$$P(Z \geq c) = P\left(Z - E(Z) \geq c - E(Z)\right).$$

On suppose désormais $c > E(Z)$.
Alors : $(Z - E(Z) \geq c - E(Z)) \subset (|Z - E(Z)| \geq c - E(Z))$ Ainsi,

$$P(Z \geq c) = P(Z - E(Z) \geq c - E(Z)) \leq P(|Z - E(Z)| \geq c - E(Z)) \leq \frac{V(Z)}{(c - E(Z))^2}$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Il reste à choisi c tel que $\dfrac{V(Z)}{(c - E(Z))^2} \leq 0.05$.
Or,

$$\begin{aligned}
& \frac{V(Z)}{(c - E(Z))^2} \leq 0.05 \\
\iff \quad & \frac{V(Z)}{0.05} \leq (c - E(Z))^2 \\
\iff \quad & \sqrt{\frac{V(Z)}{0.05}} \leq |c - E(Z)| \\
\iff \quad & \sqrt{\frac{V(Z)}{0.05}} \leq c - E(Z) \quad \text{car } c > E(Z) \\
\iff \quad & E(Z) + \sqrt{\frac{V(Z)}{0.05}} \leq c \\
\iff \quad & 45 + \sqrt{\frac{40.75}{0.05}} \leq c
\end{aligned}$$

En prenant $c \geq 74$, la condition est vérifiée.