Chapitre 22 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1 : Matrice d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$. Il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On appelle matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Définition 2 : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$, une famille de vecteurs de E.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$, soient $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire : $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$.
On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

➪ **Exemple 1 :**

1. Soit $E = \mathbb{K}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 0, 1)$ vecteurs de E et $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, -1)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soient $x_1 = (3, 0)$, $x_2 = (1, 1)$, $x_3 = (7, 1)$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
3. Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Soit $\mathcal{F} = (X + 1, 3X - 2, X^2 + X)$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies.
Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$, soient $(m_{1,j}, \ldots, m_{n,j})$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire : $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$.
On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ la matrice de$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (m_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,j} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \ldots & m_{i,j} & \ldots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,j} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$.

➪ **Exemple 2 :** On admet que toutes les applications de cet exemple sont linéaires et on considèrera que $\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace de départ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de l'espace d'arrivée. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ pour :

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y - z). \end{array}$
2. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - y + 4z. \end{array}$
3. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP'. \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array}$
5. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z. \end{array}$ avec $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (rotation de centre l'origine et d'angle θ).

➪ **Exemple 3 :**
Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaître l'application linéaire f telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$$

1.3 Matrices et applications linéaires

Proposition 2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies respectivement égales à p et n, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Alors l'application : $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}$ est un isomorphisme.

En particulier :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F),\ (u = v \Longleftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)).$$

Corollaire 1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E)\dim(F)$$

1.4 Matrices et coordonnées

Proposition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectivement égales à p et n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ une base de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.
Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ dans $\mathcal{B}$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
Soient $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{C}$.
Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$.
Alors :

$$Y = AX.$$

➪ **Exemple 4 :** Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

1.5 Opérations sur les matrices de deux applications linéaires

Proposition 4 : Matrice d'une combinaison linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v).$$

Proposition 5 : Matrice d'une composée

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).$$

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n,$$

où $u^n = u \circ \dots \circ u$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).\dots.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension n</u> munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$$u \text{ est un isomorphisme si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \text{ est inversible.}$$

On a alors $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right)$.

Corollaire 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in GL(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

On a alors $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right)$.

➪ **Exemple 5 :** Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P'$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. La matrice A de f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
L'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$$

est appelée application linéaire canoniquement associée à A.

➪ **Exemple 6 :** Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A.

Remarque : Si on identifie $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (convention usuelle), l'application canoniquement associée à A est :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

2.2 Noyau et image d'une matrice

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle noyau de A et on note $\mathrm{Ker}\, A$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\ ,\ AX = 0\}$$

- On appelle image de A en note $\mathrm{Im}\, A$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, A &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ ,\ \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \\ &= \{AX\ ,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \end{aligned}$$

Remarque : En notant u l'application canoniquement associée à A. On a :

$$(x_1,\dots,x_p) \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A,$$

$$(y_1,\dots,y_n) \in \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A.$$

➪ **Exemple 7 :** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$.
2. Soit u_1 l'application linéaire canoniquement associée à A. En déduire $\operatorname{Ker}(u_1)$ et $\operatorname{Im}(u_1)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, soit $u_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A$. En déduire $\operatorname{Ker}(u_2)$ et $\operatorname{Im}(u_2)$.

Proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
En notant C_1, ..., C_p les colonnes de A, on a :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)$$

Remarque :

- Les colonnes de A engendrent l'image.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$AX = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j = 0 \\ \quad\vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les lignes de A donnent un système d'équations du noyau.

2.3 Rang d'une matrice

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille $(C_1,\dots,C_p)$ des colonnes de A. On note :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1,\dots,C_p) = \dim(\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)) = \dim(\operatorname{Im} A).$$

Proposition 9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. On a :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(u).$$

Remarque : On a relié le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice.

Corollaire 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang d'une matrice A est égal au rang de l'application u canoniquement associée à A.

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Proposition 11 : Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$p = \dim(\mathrm{Ker}\, A) + \mathrm{rg}(A).$$

2.4 Matrices inversibles

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = n.$$

Remarque : Soit $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(T) = n$ ssi tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls. On retrouve ainsi la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$ alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.
- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.

2.5 Opérations élémentaires

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes de A préservent $\mathrm{Im}\, A$
- Les opérations élémentaires sur les lignes de A préservent $\mathrm{Ker}\, A$

Proposition 15

Les opérations élémentaires préservent le rang.

➪ **Exemple 8 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

Proposition 16 : Rang de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Corollaire 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_n).$$

III Changements de bases

3.1 Matrice de passage

Définition 7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ la matrice :

$$Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ des bases de E.

- $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$.
- $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$.
- $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}) = I_n$.
- $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')\right)^{-1} = Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

3.2 Formules de changement de base

Proposition 18 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_p)$ deux bases de E.
Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ dans $\mathcal{B}$ et de coordonnées $(x'_1,\dots,x'_p)$ dans $\mathcal{B}'$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$X = Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')X' \text{ et } X' = Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B})X.$$

➪ **Exemple 9 :** Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Posons $x = (2,-1,3,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 19 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = Pass(\mathcal{C}',\mathcal{C})\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

Corollaire 6 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B})\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') = Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

➪ **Exemple 10 :** On pose $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,2,3)$, $F = \text{Vect}(v_1,v_2)$, $G = \text{Vect}(v_3)$. On pose $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
En déduire la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

➪ **Exemple 11 :** On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (10x-y-z, -6x+9y-3z, -2x-y+11z) \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Matrices semblables

Définition 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Remarque :

- Deux matrices semblables ont même rang.
- Si deux matrices sont semblables, leurs puissances le sont aussi.

Proposition 20

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables.

➪ **Exemple 12 :** Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

➪ **Exemple 13 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

IV Systèmes linéaires

Soit

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

Notons

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

la matrice associée au système (S).

Proposition 21

Soient $x_1, ..., x_p \in \mathbb{K}$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Alors $(x_1, ..., x_p)$ est solution du système homogène associé à (S) ssi $X \in \ker A$.

Définition 9

Soit (S_0) un système homogène, notons A la matrice associée. On appelle rang de (S_0) et on note $\operatorname{rg}(S_0)$ le rang de sa matrice :

$$\operatorname{rg}(S_0) = \operatorname{rg}(A).$$

Proposition 22

Soit (S_0) un système homogène.
Notons E_0 l'espace des solutions de (S_0).
On a :

$$\dim E_0 = p - \operatorname{rg}(S_0)$$

Proposition 23

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \operatorname{Im} A$.

Proposition 24

Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.