CORRECTION DM 1

Problème 1 :

Partie I :

1-a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2>0$ et ln est défini et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.}$

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2}$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}}$$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)>0$ et $f'(1)=0$.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

c) • f' est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(1+x^2) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)\left(1+x^2 - x(x-1)\right)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

Donc :

$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}}$$

2-a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(x) = x - \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)$$

$$= x - \ln(x^2) - \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$$

$$= x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc

$$\boxed{f(x) = x\left(1 - \frac{2\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

b) Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

c) Comme $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

3- On a : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Donc une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine est :

$$\boxed{y = x.}$$

4- • f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $0 \in]-\infty, +\infty[=]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$.

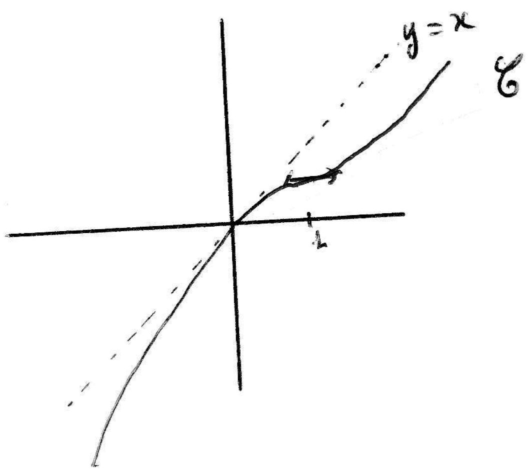
Donc il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

• On a $f(0) = 0$.

Donc l'unique solution de $f(x) = 0$ est :

$$\boxed{x = 0.}$$

5-



6-a) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, par opérations sur les fonctions dérivables,

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2x \ln(1+x^2) + (1+x^2) \cdot \frac{2x}{1+x^2} - 2x$$

$$= 2x \ln(1+x^2) + 2x - 2x.$$

Donc $\boxed{g'(x) = 2x \ln(1+x^2).}$

b) $$\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x \ln(1+x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 g'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left[g(x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(g(1) - g(0)\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(2\ln(2) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \ln(2) + \frac{1}{2}$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$

Partie II

1- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(1+u_n^2) - u_n$$

$$= -\ln(1+u_n^2) \leq 0$$

Donc : $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

2- • Pour $n=0$, $u_n = u_0 = 1 \geq 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \geq 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_n) \geq f(0)$.

Ainsi $u_{n+1} \geq 0$.

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0}.$$

3- • (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

• Posons $\ell = \lim u_n$. Alors $\ell = \lim u_{n+1}$ et, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc, par passage à la limite : $\ell = f(\ell)$. Ainsi $\ell = \ell - \ln(1+\ell^2)$

D'où $\ln(1+\ell^2) = 0$. Donc $\ell = 0$.

Ainsi : $\boxed{\lim u_n = 0.}$

4-a) Posons $h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) - (x - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x^2)$

Par opérations sur les fonctions dérivables, h est dérivable et, soit $x \in [0,1]$,

$$h'(x) = \frac{1}{2}.2x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2) - 2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(x^2-1)}{1+x^2} \leq 0$$

Donc h est décroissante sur $[0,1]$. Or $h(0) = 0$

donc : $\forall x \in [0,1]$, $h(x) \leq 0$

D'où : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2}$

b) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, de plus (u_n) décroissante

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 = 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 4-a), $f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$

Donc $u_{n+1} \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$

Ainsi $\frac{1}{2}u_n^2 \leq u_n - u_{n+1}$.

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})}$

Exercice 1 :

- Supposons $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. On a donc $x^2 = \frac{p^2}{q^2}$.
  Or $p^2 \in \mathbb{Z}$ et $q^2 \in \mathbb{N}^*$, donc $x^2 \in \mathbb{Q}$. Ainsi
  $$\boxed{x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Q}}.$$
- On a : $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
  donc $\boxed{\text{la réciproque est fausse}}$

Exercice 2 :

- Supposons que $b \mid a^4+1$. On a $b \mid a^2+1$, donc $b \mid a^2(a^2+1)$. Ainsi $b \mid a^4+a^2$.
  Donc $b \mid (a^4+1)-(a^4+a^2)$ c'est-à-dire $b \mid 1-a^2$.
  Ainsi $b \mid (1-a^2)+(a^2+1)$ donc $b \mid 2$.
- Supposons que $b \mid 2$, alors $b=1$ ou $b=2$.
  - si $b=1$, alors $b \mid a^4+1$
  - si $b=2$, comme $b \mid a^2+1$, a^2+1 est pair donc a^2 est impair ; ainsi a^4 est impair, donc a^4+1 est pair, ainsi $b \mid a^4+1$.

  Dans tous les cas : $b \mid a^4+1$.

Donc : $\boxed{b \mid a^4+1 \iff b \mid 2}$.

Exercice 3 :

1. On a : $d \mid 2n+3$ et $d \mid n$ donc $d \mid 2n+3-2.n$
   Ainsi $d \mid 3$.
   Donc $\boxed{d=1 \text{ ou } d=3}$

2) - On a : $d=3 \iff 3 \mid 2n+3$ et $3 \mid n$
   Ainsi : $d=3 \Rightarrow 3 \mid n$
   - Supposons $3 \mid n$, alors $3 \mid 2n$ et comme $3 \mid 3$, $3 \mid 2n+3$, donc $3 \mid n \Rightarrow 3 \mid 2n+3$ et $3 \mid n$
   D'où $3 \mid n \Rightarrow d=3$.
   - Ainsi $\boxed{d=3 \iff 3 \mid n}$.

3) Comme $d=1$ ou $d=3$, on a, par contraposée :
   $$\boxed{d=1 \iff 3 \nmid n}.$$