CORRECTION DM 2

Exercice 1 :

1- Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\,\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Donc : $\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}}$

2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} \quad \text{d'après le triangle de Pascal}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} \quad \text{d'après 1.}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k}\binom{n+1}{k} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}(-0+1)$$

Donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.}$

3) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$.

Ainsi, par sommes télescopiques :

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Or $u_1 = 1$ donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

Exercice 2 :

1- f est dérivable et, soit $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

2- Soient $x, y \in \mathbb{R}$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Comme f est croissante :

$$f(|x+y|) \leq f(|x|+|y|)$$

Donc $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$

Or $1+|x|+|y| \geq 1+|x| > 0$ et $1+|x|+|y| \geq 1+|y| > 0$

Donc : $\boxed{\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}}$

Problème 1 :

Partie 1 :

1- Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$\varphi(k) = \left|\prod_{j=0}^{n}(k-j)\right|$ or pour $j=k$, $k-j=0$

donc $\boxed{\varphi(k)=0}$

2- La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues donc :

$\boxed{\forall t \in [0,n],\ \varphi(t) = \prod_{k=0}^{n}|t-k|}$

3- On a : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x>0 \\ \ln(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc :

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}}$

Partie 2 :

1- Soit $t \in [0,n]$,

$$\varphi(n-t) = \left|\prod_{k=0}^{n}(n-t-k)\right| \underset{j=n-k}{=} \left|\prod_{j=0}^{n}(j-t)\right| = \prod_{j=0}^{n}|j-t| = \prod_{j=0}^{n}|t-j|$$

Donc $\boxed{\varphi(n-t) = \varphi(t)}$

2- $$\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} = \frac{\left|\prod_{k=0}^{n}(t-1-k)\right|}{\left|\prod_{k=0}^{n}(t-k)\right|} = \left|\prod_{k=0}^{n}\frac{t-(k+1)}{t-k}\right|$$

$$= \left|\frac{t-(n+1)}{t-0}\right|$$ par produit télescopique.

Donc $\boxed{\dfrac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} = \dfrac{n+1-t}{t}}$ car $t>0$ et $n+1-t>0$

3 - • Soit $t \in [1, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N}$, on a $2t \leq n \leq n+1$

donc $t \leq n+1-t$, ainsi $1 \leq \frac{n+1-t}{t}$

d'où $1 \leq \frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}$. Or $\varphi(t) > 0$

donc $\varphi(t) \leq \varphi(t-1)$

• Soit $t \in [1, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N}$, on a $\varphi(t) = \varphi(t-1) = 0$

donc $\varphi(t) \leq \varphi(t-1)$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [1, \frac{n}{2}], \ \varphi(t) \leq \varphi(t-1).}$

4 - Soit $\alpha \in [0, n]$ tel que $\varphi(\alpha) = \max\limits_{[0,n]} \varphi$.

• Si $\alpha > \frac{n}{2}$ alors $n - \alpha < \frac{n}{2}$

Or $\varphi(n-\alpha) = \varphi(\alpha)$.

Ainsi $\varphi(n-\alpha) = \max\limits_{[0,n]} \varphi$ et comme $n - \alpha \in [0, \frac{n}{2}]$

φ atteint son maximum en un point de $[0, \frac{n}{2}]$

• Dans tous les cas :

$\boxed{\varphi \text{ atteint son maximum en un point de } [0, \tfrac{n}{2}].}$

Partie 3 :

1 - • $\ln(\varphi(t)) = \ln \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right| = \ln \prod_{k=0}^{n} |t-k|$

Donc $\boxed{\ln(\varphi(t)) = \sum_{k=0}^{n} \ln |t-k|}$

• Soit $j \in \mathbb{Z}$, $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et φ est dérivable ③

sur $]j, j+1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par composition,

$\ln \circ \varphi$ est dérivable sur $]j, j+1[$.

Soit $t \in]j, j+1[$ en dérivant la relation précédente,

$$\boxed{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}}$$

2 - , Soit $t \in [\frac{1}{2}, 1[$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, $t - k < 0$

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k} < 0.}$

• Soit $t \in [\frac{1}{2}, 1[$,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k}$$

$$= \frac{2t-1}{t(t-1)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k}$$

Or $\frac{1}{2} \leq t < 1$ donc $2t-1 \geq 0$, $t > 0$, $t-1 < 0$

ainsi $\frac{2t-1}{t(t-1)} \leq 0$, donc $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} < 0$

Or $\varphi(t) > 0$, donc $\boxed{\varphi'(t) < 0}$

3 - a) g est dérivable sur $]0, 1[$ et, soit $t \in]0, 1[$,

$$\boxed{g'(t) = - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-k)^2}}$$

b) On a donc : $\forall t \in]0,1[,\ g'(t) < 0$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]0,1[}$.

c) Soit $t \in]0,1[$, on a : $\varphi'(t) = \varphi(t).g(t)$

Or φ ne s'annule pas sur $]0,1[$ et comme g est strictement décroissante, g s'annule au plus une fois sur $]0,1[$.

Donc $\boxed{\varphi' \text{ s'annule au plus une fois sur }]0,1[}$.

4- • Comme φ admet un maximum atteint sur $[0,1]$, il existe $a \in [0,1]$ tel que $\varphi(a) = \max\limits_{[0,n]} \varphi$.

Or $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) > 0$

Donc $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Ainsi $a \in]0,1[$.

On a donc $\varphi'(a) = 0$

Ainsi a est l'unique point d'annulation de φ' sur $]0,1[$.

• De plus, $\varphi' < 0$ sur $[\frac{1}{2},1[$ donc φ strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},1[$, ainsi $a \notin [\frac{1}{2},1[$.

Donc $a \in]0,\frac{1}{2}[$.

Ainsi $\boxed{\text{le maximum de } \varphi \text{ est atteint en un unique point de }]0,\tfrac{1}{2}[}$.

• $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = \frac{\varphi'(t_n)}{\varphi(t_n)}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = 0}$.

Partie 4 :

1-a) $t_n \in]0,\frac{1}{2}[$ donc $0 < k - t_n < k$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{k-t_n} > \frac{1}{k}}$.

b) En sommant : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Or :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-t_n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_n-k} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n-k} + \frac{1}{t_n} = 0 + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{t_n}.$$

Donc : $\boxed{\frac{1}{t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

2-a)
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$
$$= \ln(n+1) - \ln(1) \quad \text{par sommes télescopiques}$$
$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$$

Donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt}$

b) Soit $t \in [k, k+1]$, on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}$.

Ainsi $\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

3- $\frac{1}{t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n+1) > 0$

Donc $\boxed{t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}}$.

4- Soit $t \in [0, n]$, on a : $\varphi(t) \leq \varphi(t_n)$

Or : $\varphi(t_n) = \prod_{k=0}^{n} |t_n - k| = t_n \prod_{k=1}^{n} (k - t_n)$ car $t_n \in]0, \frac{1}{2}[$

$\leq t_n \prod_{k=1}^{n} k$

$\leq t_n \cdot n!$

Donc $\boxed{\varphi(t_n) < \frac{n!}{\ln(n+1)}}$.