CORRECTION
DM4

Problème 1 :

1-a)
```
def suite (n, a, b, u0, u1) :
    u = u0
    v = u1
    for i in range (n) :
        u, v = v, a*v + b*u        # u, v = u_{n+1}, u_{n+2}
    return u
```

b)
```
def liste_suite (n, a, b, u0, u1):
    if n == 0 :
        return [u0]
    else :
        l = [u0, u1]
        for i in range (2, n+1) :
            l.append(a*l[-1] + b*l[-2])  # ajout de a u_n + b u_{n-1} = u_{n+1}
        return l
```

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$$
$$= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b)$$

Or $r_1^2 - a r_1 - b = 0$ et $r_2^2 - a r_2 - b = 0$ donc :

$$a u_{n+1} + b u_n = \lambda r_1^n \cdot r_1^2 + \mu r_2^n \cdot r_2^2$$
$$= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} = u_{n+2}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.}$

b).i) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \mu(r_2 - r_1) = u_1 - r_1 u_0 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \mu = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \text{car } r_1 \neq r_2$$

Posons $\lambda = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$.

On a : $\boxed{u_0 = \lambda + \mu \text{ et } u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2.}$

ii) • Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = \lambda + \mu = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

• Pour $n = 1$, $u_n = u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$. On a :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$
$$= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$$
$$= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b)$$
$$= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}$$

• Donc par récurrence double :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.}$$

c) Les suites vérifiant $(*)$ sont les suites (u_n) telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

3-a). On a : $r = \dfrac{-(-a) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ avec $\Delta = 0$ donc :

$$\boxed{r = \frac{a}{2}.}$$

- $ar = \dfrac{a^2}{2} = 2 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ donc $\boxed{ar = 2r^2.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a u_{n+1} + b u_n &= a(\lambda + \mu(n+1)) r^{n+1} + b(\lambda + \mu n) r^n \\ &= \lambda r^n (ar + b) + \mu n r^n (ar + b) \\ &\quad + a \mu r^{n+1} \end{aligned}$$

Or $r^2 - ar - b = 0$ donc :

$$\begin{aligned} a u_{n+1} + b u_n &= \lambda r^n \cdot r^2 + \mu n r^n \cdot r^2 + \mu r^n \cdot ar \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n \cdot 2r^2 \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + 2\mu r^{n+2} \\ &= (\lambda + \mu(n+2)) r^{n+2} \\ &= u_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.}$

c) i) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = (\lambda + \mu) r \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu r = u_1 - u_0 r \end{cases}$$

Or si $r = 0$, comme $r^2 - ar - b = 0$, on a $b = 0$ ce qui est absurde donc $r \neq 0$. Ainsi, posons $\lambda = u_0$ et $\mu = \dfrac{u_1 - u_0 r}{r}$, on a :

$$\boxed{u_0 = \lambda \text{ et } u_1 = (\lambda + \mu) r}$$

ii) - Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = \lambda = (\lambda + \mu n) r^n$

- Pour $n = 1$, $u_n = u_1 = (\lambda + \mu) r = (\lambda + \mu n) r^n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$ et $u_{n+1} = (\lambda + \mu(n+1)) r^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ &= a(\lambda + \mu(n+1)) r^{n+1} + b(\lambda + \mu n) r^n \\ &= (\lambda(ar + b) + \mu n (ar + b) + \mu a r) r^n \\ &= (\lambda r^2 + \mu n r^2 + 2\mu r^2) r^n \\ &= (\lambda + \mu(n+2)) r^{n+2} \end{aligned}$$

- Donc, par récurrence double :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n}$$

d) Les suites vérifiant $(*)$ sont les suites (u_n) telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) 2^n.$$

Problème 2 :

1-a) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc :

$$\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

b) • Si $x > 0$, $-1 \notin [\frac{1}{x}, x]$ et $-1 \notin [x, \frac{1}{x}]$ donc $g(x)$ est défini.

• Si $x < 0$,

• si $x \leq -1$, on a $\frac{1}{x} \geq -1$ donc $-1 \in [x, \frac{1}{x}]$ ainsi $g(x)$ n'est pas défini.

• si $x \geq -1$, on a $\frac{1}{x} \leq -1$ donc $-1 \in [\frac{1}{x}, x]$ ainsi $g(x)$ n'est pas défini.

Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}^{+*}.}$

2-a) On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$

on a $t = \frac{1}{u}$ et $dt = -\frac{1}{u^2} du$; donc :

$$g(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(\frac{1}{u^2}+1)} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(1+u^2)} du$$

Donc $\boxed{g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(1+u)^2(1+u^2)} du.}$

b)
$$g(x) + g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} dt + \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2}{(1+t)^2(1+t^2)} dt$$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1+t^2}{(t+1)^2(1+t^2)} dt$$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\frac{1}{x}+1}$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}$$

Donc $\boxed{g(x) + g(x) = \frac{x-1}{x+1}.}$

c) On a : $2g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, donc :

$$\boxed{g(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}}$$

3- $I = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+2\sin\theta\cos\theta} \, d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta} \, d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} \, d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)(1+\tan\theta)^2} \, d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{(1+\tan\theta)^2} \, d\theta$

On effectue le changement de variable $t = \tan\theta$,
on a $dt = (1+\tan^2\theta)d\theta = (1+t^2)\,d\theta$, donc :

$I = \int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \frac{1}{(1+t)^2} \frac{dt}{1+t^2}$

$= \int_{\tan(\alpha)}^{\frac{1}{\tan(\alpha)}} \frac{dt}{(1+t)^2(1+t^2)}$

$= -g(\tan(\alpha))$

$= -\frac{\tan(\alpha)-1}{2(\tan(\alpha)+1)}$

Donc : $\boxed{I = \frac{1-\tan(\alpha)}{2(1+\tan(\alpha))}}$