CORRECTION DM 5

Problème 1 :

1-a) Posons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(-x) = -(-x) = x$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une involution.}}$

b) Posons $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(\varphi(x)) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une involution.}}$

c) Soit $\varphi : I \to I$ une involution. On a $\varphi \circ \varphi = Id_I$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bijective (et } \varphi^{-1} = \varphi).}$

2-a) En appliquant P_1 à 1 et y_1 puis à 1 et y_2, on a :

$$f(1 \cdot f(y_1)) = y_1 f(1) \text{ et } f(1 \cdot f(y_2)) = y_2 f(1)$$

Or $f(y_1) = f(y_2)$ donc $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$.

Ainsi $\boxed{y_1 f(1) = y_2 f(1).}$

b) f est à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc $f(1) \neq 0$, ainsi $y_1 = y_2$.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$

c) En appliquant P_1 à 1 et 1, on a :

$$\boxed{f(f(1)) = f(1).}$$

Or f injective donc : $\boxed{f(1) = 1.}$

d) Soit $x \in]0, +\infty[$, en appliquant P_1 à 1 et x, on a :

$$f(1 \cdot f(x)) = x f(1)$$

Or $f(1) = 1$, donc $f(f(x)) = x$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est une involution.}}$

e) En appliquant P_1 à a et $f(b)$, on a :

$$f(a f(f(b))) = f(b) f(a)$$

Or $f(f(b)) = b$ donc : $\boxed{f(ab) = f(a) f(b).}$

3-a) Soit $x \in]0, +\infty[$, en appliquant P_1 à x et x, on a :

$$f(x f(x)) = x f(x)$$

Donc $\boxed{x f(x) \in F}$

b) D'après 2.c, $f(1) = 1$ donc $\boxed{1 \in F.}$

c) • D'après 2.e, $f(xy) = f(x) f(y)$

Or $x, y \in F$, donc $f(xy) = xy$ ainsi $\boxed{xy \in F}$

• D'après 2.e $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y)$

Or $x, y \in F$ donc $x = f\left(\frac{x}{y}\right) y$ ainsi $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}$ donc $\boxed{\frac{x}{y} \in F}$

d) • Pour $n=0$, $x^n = 1 \in F$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x^n \in F$.

Comme $x \in F$ et $x^n \in F$, d'après 3.b, $x.x^n \in F$

Donc $x^{n+1} \in F$.

• Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x^n \in F}$

e) Supposons $x > 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = x^n$.

Or f est majorée sur $]1, +\infty[$, donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \in]1, +\infty[$) donc $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{x \leq 1}$

f) • $1 \in F$ donc $\{1\} \subset F$

• Soit $x \in F$, on a $x \leq 1$.

De plus $\frac{1}{x} \in F$, donc $\frac{1}{x} \leq 1$ ainsi $x \geq 1$.

D'où $x = 1$ donc $F \subset \{1\}$.

Ainsi : $\boxed{F = \{1\}}$

g) Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $x f(x) \in F$ or $F = \{1\}$

Donc $x f(x) = 1$, ainsi $f(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $\boxed{\begin{array}{l} f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ \quad x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}}$

4- • <u>Analyse</u> : Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ vérifiant P_1 et P_2.

D'après 3, on a $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

• <u>Synthèse</u> : Posons $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

• Soient $x, y \in]0,+\infty[$,

$$f(x f(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = y f(x)$$

Donc f vérifie P_1.

• $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x} \leq 1$

Donc f vérifie P_2.

• <u>Conclusion</u> : $\boxed{\begin{array}{l} \text{L'unique solution au problème est} \\ f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ \quad x \mapsto \frac{1}{x}. \end{array}}$

<u>Problème 2</u> :

1-a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = x \iff \frac{3x+4}{2x+3} = x \iff 3x+4 = 2x^2+3x$$

$$\iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \quad \text{car } x \in \mathbb{R}^+$$

Donc $\boxed{\text{l'unique point fixe de } f \text{ est } x = \sqrt{2}.}$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{3(2x+3) - 2(3x+4)}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^2} > 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+}$

2-a) • Pour $n=0$, $u_0 = 1$ $u_1 = \frac{7}{5} \geq u_0$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_{n+1} \geq u_n$.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$,

on a : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

• Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Donc : $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

b) •

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \sqrt{2} & +\infty \\ \hline f & \frac{4}{3} & \nearrow \sqrt{2} \nearrow & \end{array}$$

On a $f([0,\sqrt{2}]) = [\frac{4}{3}, \sqrt{2}] \subset [0,\sqrt{2}]$

Donc $[0,\sqrt{2}]$ est stable par f.

Or $u_0 \in [0,\sqrt{2}]$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\sqrt{2}]$

Ainsi (u_n) est majorée.

Comme (u_n) croissante alors $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

• Posons $\ell = \lim u_n$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Comme f est continue, par passage à la limite : $\ell = f(\ell)$

Donc, d'après 1.a), $\ell = \sqrt{2}$.

Ainsi : $\boxed{\lim u_n = \sqrt{2}.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• On a : $u_n \in [0,\sqrt{2}]$ donc $0 \leq \sqrt{2} - u_n$.

• $\frac{2-u_n^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2}$

Or (u_n) croissante donc $u_n \geq u_0 = 1$.

Ainsi $\frac{2-u_n^2}{2} \geq \frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+1)}{2} \geq \frac{(\sqrt{2}-u_n)(1+1)}{2}$

$\geq \sqrt{2} - u_n$

• Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sqrt{2} - u_n \leq \frac{2-u_n^2}{2}.}$

3-a) • Pour $n=0$, posons $a_0 = 1$, $b_0 = 1$.

On a : $a_0, b_0 \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = \frac{a_0}{b_0}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Alors $u_{n+1} = \frac{3\frac{a_n}{b_n}+4}{2\frac{a_n}{b_n}+3} = \frac{3a_n + 4b_n}{2a_n + 3b_n}$

Posons $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$

On a : $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

• Donc, par récurrence :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}}$

b) • Pour $n=0$, $a_n = 1$ et $b_n = 1$ sont impairs.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons a_n et b_n impairs.

Alors • $3a_n$ est impair et $4b_n$ est pair donc

$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ est impair.

• $2a_n$ est pair et $3b_n$ est impair donc

$b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ est impair.

• Donc, par récurrence,

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n \text{ et } b_n \text{ sont impairs.}}$

c) • Pour $n=0$, $a_n = 1 \geq 5^n$ et $b_n = 1 \geq 5^n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $a_n \geq 5^n$ et $b_n \geq 5^n$.

Alors $a_{n+1} \geq 3.5^n + 4.5^n = 7.5^n \geq 5.5^n = 5^{n+1}$

$b_{n+1} \geq 2.5^n + 3.5^n = 5.5^n \geq 5^{n+1}$

• Donc, par récurrence :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 5^n \text{ et } b_n \geq 5^n.}$

d) • Pour $n=0$, $2b_n^2 - a_n^2 = 2 - 1 = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2b_n^2 - a_n^2 = 1$.

$$2b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = 2(2a_n + 3b_n)^2 - (3a_n + 4b_n)^2$$
$$= 2(4a_n^2 + \cancel{12a_nb_n} + 9b_n^2)$$
$$- (9a_n^2 + \cancel{24a_nb_n} + 16b_n^2)$$

$$2b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 2b_n^2 = 1$$

• Donc, par récurrence :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2b_n^2 - a_n^2 = 1.}$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 2.c,

$$0 \leq \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{2 - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{2}$$

Or : $$\frac{2 - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{2} = \frac{2b_n^2 - a_n^2}{2b_n^2} = \frac{1}{2b_n^2}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{2b_n^2}}$

f) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \sqrt{2}\, b_n - a_n \leq \frac{1}{2b_n}$$

Donc $$0 \leq \sqrt{2}\, b_n \pi - a_n \pi \leq \frac{\pi}{2b_n} \leq \frac{\pi}{2} \text{ car } b_n \in \mathbb{N}^*$$

Or cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2b_n}\right) \leq \cos\left(\sqrt{2}\, b_n \pi - a_n \pi\right) \leq 1$$

Or a_n est impair, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2b_n}\right) \leq -\cos(\sqrt{2}\, b_n \pi) \leq 1$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(\sqrt{2}\, b_n \pi) \leq -\cos\left(\frac{\pi}{2b_n}\right)$

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 5^n$ donc $\lim b_n = +\infty$.

  Ainsi $\lim \frac{\pi}{2b_n} = 0$, donc $\lim \cos\left(\frac{\pi}{2b_n}\right) = 1$.

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \cos(\sqrt{2}\, b_n \pi) = -1}$$

4- • Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos x + \cos(\sqrt{2}x) \geq -2$

Donc -2 est un minorant de A.

• Soit m un minorant de A,

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \cos(\sqrt{2}\,x) \geq m$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(b_n \pi) + \cos(\sqrt{2}\, b_n \pi) \geq m$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n est impair, donc.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 + \cos(\sqrt{2}\, b_n \pi) \geq m$$

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, $-2 \geq m$.

• Donc -2 est le plus grand minorant de A.

Ainsi : $\boxed{\inf A = -2}$