CORRECTION DM6

Problème 1 :

Partie A :

1)
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $P D_A P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Or $A = M(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

D'où : $\boxed{P D_A P^{-1} = A}$.

3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Or $B = M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Posons $\boxed{D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$, alors D_B est diagonale

et $P^{-1} B P = D_B$ donc $\boxed{B = P D_B P^{-1}}$.

4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $M(x,y) = x \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$= xA + yB$.

$= x P D_A P^{-1} + y P D_B P^{-1}$

Donc $M(x,y) = P(x D_A + y D_B) P^{-1}$.

Posons $D(x,y) = x D_A + y D_B$

Alors $D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}$ est diagonale

et $\boxed{M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}}$.

5) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, comme P est inversible, $M(x,y)$ est inversible ssi $D(x,y)$ est inversible.

Or $D(x,y)$ est diagonale donc est inversible ssi $x \neq 0$ et $2x-y \neq 0$ et $3x+y \neq 0$.

Ainsi $\boxed{M(x,y) \text{ est inversible ssi } \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x \neq y \\ 3x \neq y \end{cases}}$

6) •

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = M(0,-1)$

Donc $\boxed{B^2 \in E}$

•

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix}$

Supposons $A^2 \in E$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = M(x,y)$.

On a donc $3x = 11$ et $-2y = -4$ donc $x = \frac{11}{3}$ et $y = 2$.

De plus $-x-y = -7$ donc $-\frac{11}{3} - 2 = -7$ ce qui est absurde. Donc $\boxed{A^2 \notin E}$

Partie B :

1) $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2). Soit $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Posons $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. On a : $\boxed{X_{n+1} = CX_n}$.

• $M(1,3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{C = M(1,3)}$

3) • Pour $n=0$, $X_n = X_0 = I_n X_0 = C^n X_0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $X_n = C^n X_0$.

Alors : $X_{n+1} = C X_n = C . C^n X_0 = C^{n+1} X_0$.

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = C^n X_0}.$$

4). $C = M(1,3) = P D(1,3) P^{-1}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $C^n = P D(1,3)^n P^{-1}$

On $D(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $D(1,3)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2(-1)^n & 0 \\ -1 & 3(-1)^n & 0 \\ -2 & 4(-1)^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2(-1)^n & 0 \\ -1 & 3(-1)^n & 0 \\ -2 & 4(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ 3(-1)^n-1 & 3(-1)^n-2 & 1 \\ 4(-1)^n-2 & 4(-1)^n-4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $C^n = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ 3(-1)^n-1 & 3(-1)^n-2 & 1 \\ 4(-1)^n-2 & 4(-1)^n-4 & 2 \end{pmatrix}$

D'où $X_n = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ 3(-1)^n-1 \\ 4(-1)^n-2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\boxed{\begin{cases} a_n = 1-2(-1)^n \\ b_n = 3(-1)^n-1 \\ c_n = 4(-1)^n-2 \end{cases} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.}$

Problème 2 :

1-a) En appliquant $(*)$ à $x=y=1$, on a $f(1) = f(1) + f(1)$

Donc $\boxed{f(1) = 0}$.

b) Soient $x, y \in]0,+\infty[$. En appliquant $(*)$ à $\frac{y}{x}$ et x, on a :

$$f(y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + f(x)$$

Donc : $\boxed{f(y) - f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

2- a) Soit $a \in]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$,

on a : $f(x) - f(a) = f\left(\frac{x}{a}\right)$ (d'après 1.b)

Or $\lim\limits_{x \to a} \frac{x}{a} = 1$ et f est continue en 1, ainsi,

$\lim\limits_{x \to a} f\left(\frac{x}{a}\right) = f(1) = 0$ (d'après 1.a)

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ainsi f est continue en a.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$

b) Soit $x \in]0,+\infty[$.

• Pour $n=0$, $f(x^n) = f(1) = 0 = n f(x)$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(x^n) = n f(x)$.

Alors $f(x^{n+1}) = f(x^n . x) = f(x^n) + f(x)$ d'après $(*)$

$= n f(x) + f(x) = (n+1) f(x)$.

- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x^n) = n f(x)$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, alors $-n \in \mathbb{N}$, donc

$$f(x^{-n}) = -n f(x).$$

Or $f(x^{-n}) = f\left(\frac{1}{x^n}\right) = f(1) - f(x^n)$ d'après 1.b
$= -f(x^n)$.

D'où $\quad -f(x^n) = -n f(x)$.

Ainsi $\quad f(x^n) = n f(x)$.

- Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = n f(x).}$

c) Soit $x \in]0,+\infty[$, soit $q \in \mathbb{N}^*$.

$$f(x) = f\left((x^{1/q})^q\right) = q f(x^{1/q}) \quad \text{d'après 2.b.}$$

Donc $\boxed{f(x^{1/q}) = \frac{1}{q} f(x).}$

d) Soit $x \in]0,+\infty[$, soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$.

Donc $f(x^r) = f\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p f(x^{1/q}) = \frac{p}{q} f(x)$

Donc : $\boxed{f(x^r) = r f(x).}$

e) On a : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(e^r) = r f(e)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe (r_n) suite de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim r_n = x$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(e^{r_n}) = r_n f(e)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{r_n} = e^x$ et comme f est continue,

$$\lim_{n\to+\infty} f(e^{r_n}) = f(e^x).$$

Donc, par passage à la limite : $\boxed{f(e^x) = x f(e)}$

f) Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = f(e^{\ln x}) = \ln x \cdot f(e).$$

Posons $a = f(e)$. On a : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = a \ln x}$

3- Analyse : Supposons qu'il existe f vérifiant $(*)$ continue en 1.
D'après 2, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f : x \mapsto a \ln x$.

Synthèse : Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $f : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto a \ln x \end{array}$.

Alors f est continue en 1 et, soient $x, y \in]0,+\infty[$,

$$f(x) + f(y) = a \ln x + a \ln y = a \ln(xy) = f(xy)$$

Donc f vérifie $(*)$.

- **Conclusion :** Les fonctions vérifiant (*) continues en 1 sont :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\ln x \end{array}, \ a \in \mathbb{R}.}$$

4 - Soit $x, y \in]0,+\infty[$, $x \neq y$, on a $f(y) - f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Donc $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{y-x} = \frac{1}{x}\,\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)-f(1)}{\frac{y}{x}-1}$$

Or f est dérivable en 1, et $\lim\limits_{y\to x} \frac{y}{x} = 1$, donc :

$$\lim_{y\to x} \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)-f(1)}{\frac{y}{x}-1} = f'(1).$$

Ainsi : $$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{1}{x} f'(1)$$

Donc f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.}$

5 - **Analyse :** Supposons qu'il existe f vérifiant (*) dérivable en 1.

Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{a}{x}$.

Donc, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = a\ln x + b$$

Or $f(1) = 0$, donc $b = 0$.

Ainsi $f : x \mapsto a\ln x$.

- **Synthèse :** Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\ln x \end{array}$

Alors f est dérivable en 1 et vérifie (*).

- **Conclusion :** Les fonctions vérifiant (*) dérivables en 1 sont :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\ln x \end{array}, \ a \in \mathbb{R}.}$$