$$\boxed{\text{CORRECTION DM 7}}$$

1-a) $\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j) \in \mathbb{R}^*$ donc :

$$\deg(L_i) = \deg\Big(\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)\Big)$$

$$= \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \deg(X - a_j) = \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} 1$$

Ainsi : $\boxed{\deg(L_i) = n-1.}$

b) Soient $i, k \in [\![1,n]\!]$.

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}$$

- si $i = k$, on a : $L_i(a_k) = 1$
- si $i \neq k$, il existe $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ tel que $k = j$ et donc $a_k - a_j = 0$. Ainsi : $L_i(a_k) = 0$.

D'où : $\boxed{L_i(a_k) = \delta_{i,k}}$

c) • Analyse : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$.

• Synthèse : Posons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$.

Posons $Q = P - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$

- On a $\deg P \leq n-1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\deg(L_i) = n-1$ donc $\deg Q \leq n-1$.
- Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k)$

$$= P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \delta_{i,k}$$

$$= P(a_k) - P(a_k) = 0$$

Donc Q admet au moins n racines distinctes.

- Ainsi $Q = 0$ et donc $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$

• Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe un unique } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \\ \text{tel que } P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i \text{ et on a :} \\ \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).\end{array}}$$

d) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$

$\left(\forall k \in [\![1, n]\!],\ Q(a_k) = x_k\right) \iff \left(\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = x_\ell\right)$

$\iff \quad Q = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Donc $\boxed{\text{il existe un unique } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ Q(a_k) = x_k.}$

e-i) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, a_i est racine simple de ϕ

donc : $\boxed{\phi'(a_i) \neq 0.}$

ii) On a : $Q = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\phi = (X - a_i) \prod_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_\ell)$$

Donc $$\phi' = \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_\ell) + (X - a_i)\left(\prod_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_\ell)\right)'$$

Ainsi $$\phi'(a_i) = \prod_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_\ell)$$

Donc $$L_i = \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\phi'(a_i)}$$

Ainsi $$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\phi'(a_i)}.}$$

2- $|f|$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc d'après le théorème des bornes atteintes,

$\boxed{|f| \text{ admet un maximum sur } [-1, 1].}$

3-a-i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\varphi(t) = 0 \iff f(t) - P(t) - \lambda \phi(t) = 0$

$\iff \lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{\phi(t)}$

car $t \notin \{a_1, .., a_n\}$ donc t n'est pas racine de ϕ.

Ainsi $\boxed{\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{\phi(t)} \text{ convient.}}$

ii) • Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P(a_i) = f(a_i)$ et $\phi(a_i) = 0$

donc $\varphi(a_i) = 0$.

Ainsi φ s'annule en $a_1, .., a_n$ et en t donc

$\boxed{\varphi \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois sur } [-1, 1].}$

• Soient $b_1, .., b_{n+1} \in [-1, 1]$ tels que $b_1 < ... < b_{n+1}$ et $\{b_1, .., b_{n+1}\} = \{a_1, .., a_n, t\}$ (autrement dit, on réordonne $a_1, .., a_n, t$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, φ est continue sur $[b_j, b_{j+1}]$ et dérivable sur $]b_j, b_{j+1}[$.

De plus $\varphi(b_j) = \varphi(b_{j+1}) \; (=0)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi'(c_j) = 0$. Comme $c_1 < \dots < c_n$,

$$\boxed{\varphi' \text{ s'annule au moins } n \text{ fois sur } [-1,1].}$$

iii) En réitérant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[-1,1]$.

Donc $\boxed{\varphi^{(n)} \text{ s'annule au moins une fois sur } [-1,1].}$

iv) $\varphi^{(n)}(a) = 0 = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \phi^{(n)}(a)$

Or $\deg P \leq n-1$ donc $P^{(n)} = 0$

et $\deg \phi = n$ donc $\deg \phi^{(n)} = 0$ ainsi $\phi^{(n)}$ est constant. Comme ϕ est degré n et de coefficient dominant 1, $\phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} X^{n-n} = n!$

Donc $\phi^{(n)}(a) = 0$.

Ainsi $0 = f^{(n)}(a) - n!\,\lambda$

Or $\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{\phi(t)}$

d'où $\boxed{f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \phi(t)}$

b) Soit $t \in [-1,1]$

$$|f(t) - P(t)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |\phi(t)|$$

Or $|f^{(n)}(a)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty = M_n$.

D'où : $\boxed{|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |\phi(t)|}$