CORRECTION
DM 8

Problème 1 :

1) On a : $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Donc, par primitivation :

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{=} \operatorname{Arcsin}(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

D'où : $\boxed{\operatorname{Arcsin}(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}$

2-a) • f_n est continue sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$

• f_n est dérivable et, soit $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n'(x) = (-1)^n \cos x + \frac{1}{x^2}$$

Or : • si n pair, $\cos x \in [0, 1]$ donc $(-1)^n \cos x \in [0, 1]$

• si n impair, $\cos x \in [-1, 0]$ donc $(-1)^n \cos x \in [0, 1]$

Donc dans tous les cas, $(-1)^n \cos x \in [0, 1]$.

Comme $\frac{1}{x^2} > 0$, on a donc $f_n'(x) > 0$

Ainsi f_n est strictement croissante.

• Donc f_n est bijective de $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ vers $[f_n(n\pi), f_n(n\pi + \frac{\pi}{2})]$.

Or $f_n(n\pi) = 0 - \dfrac{1}{n\pi} = -\dfrac{1}{n\pi}$

$f_n(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n (-1)^n - \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = 1 - \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$

Donc $\boxed{f_n \text{ est bijective de } [n\pi, n\pi + \tfrac{\pi}{2}] \text{ vers } [-\tfrac{1}{n\pi}, 1 - \tfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}]}$

b) • Soit $x \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$

• si n pair, $\sin x > 0$ donc :

$$|x \sin x| = 1 \iff x \sin x = 1 \iff (-1)^n \sin x = \frac{1}{x} \iff f_n(x) = 0$$

• si n impair, $\sin x < 0$ donc :

$$|x \sin x| = 1 \iff -x \sin x = 1 \iff (-1)^n \sin x = \frac{1}{x} \iff f_n(x) = 0$$

Dans tous les cas : $|x \sin x| = 1 \iff f_n(x) = 0$.

• Or $0 \in]-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}[$ et f_n bijective de $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

• Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } |x \sin x| = 1 \text{ admet une unique solution dans }]n\pi, n\pi + \tfrac{\pi}{2}[.}$

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Donc $1 < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$.

D'où : $\boxed{x_n \sim n\pi}$.

4-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\sin(y_n) = \sin(x_n - n\pi) = (-1)^n \sin(x_n) = \frac{1}{x_n}$.

Or $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\boxed{y_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x_n}\right)}.$$

b) On a : $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

De plus $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$, d'où $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n}$

Ainsi : $\boxed{y_n \sim \frac{1}{n\pi}}$

5-a) Comme $y_n \sim \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Ainsi $x_n - n\pi = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc $\boxed{z_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\frac{1}{n\pi} + z_n = x_n - n\pi = y_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x_n}\right)$

Donc $\boxed{\frac{1}{n\pi} + z_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n}\right)}$

c) Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n\pi} + z_n &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^3}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{d'après 1.} \\
&= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n\pi} + z_n = x_n - n\pi$, d'où :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

Problème 2 :

1-a) Soit $(x,y,z) \in E_1$, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$(x,y,z) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$

$$\iff \begin{cases} x = \lambda_1 - \lambda_3 \\ y = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = -\lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = x + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - z \\ y = -(x+\lambda_3) + (\lambda_3 - z) = -x-z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = x + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - z \end{cases}$$

Posons $\lambda_3 = |x| + |z|$, on a : $\lambda_3 \geq 0$

$\lambda_2 = \lambda_3 - z = |x| + |z| - z$, comme $z \leq |z|$, on a $\lambda_2 \geq 0$

$\lambda_1 = x + \lambda_3 = x + |x| + |z|$, comme $-x \leq |x|$, on a $\lambda_1 \geq 0$

et on a : $(x,y,z) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$

Donc $\boxed{(x_1, x_2, x_3) \text{ est positivement génératrice de } E_1}$

b) Soit $P \in E_2$, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$

$\iff P = \lambda_1(X^2 + X + 1) + \lambda_2(X^2 - X - 1) + \lambda_3(-2X^2 + X + 1)$

Posons $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P \in E_2 \iff c = b$

Donc $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$

$$\iff aX^2 + bX + b = \lambda_1(X^2+X+1) + \lambda_2(X^2-X-1) + \lambda_3(-2X^2+X+1)$$

$$\iff \begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ b = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = a+b \\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = a-b \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{\lambda_3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{a-b}{2} + \frac{3\lambda_3}{2} \end{cases}$$

Posons $\lambda_3 = |a+b| + \frac{|a-b|}{3}$, on a $\lambda_3 \geq 0$

$\lambda_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{\lambda_3}{2} = \frac{a+b+|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{6} \geq 0$

$\lambda_2 = \frac{a-b}{2} + \frac{3\lambda_3}{2} = \frac{a-b+|a-b|}{2} + |a+b| \geq 0$

et $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$.

Donc $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est positivement génératrice de } E_2}$

2-a) Soit $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ tel que

$$x = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell x_\ell .$$

Comme $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, alors :

$\boxed{(x_1, \dots, x_p) \text{ est génératrice de } E.}$

b) . Si $E = \{0_E\}$, toute famille de E est liée.

. Si $E \neq \{0_E\}$, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Comme $x, -x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p), (\mu_1, \dots, \mu_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ tels que $x = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell x_\ell$ et $-x = \sum_{\ell=1}^{p} \mu_\ell x_\ell$.

Donc $$0_E = \sum_{\ell=1}^{p} (\lambda_\ell + \mu_\ell) x_\ell .$$

. Si $\forall \ell \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_\ell + \mu_\ell = 0$

Alors, comme : $\forall \ell \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_\ell \geq 0$, $\mu_\ell \geq 0$,

on a : $\forall \ell \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_\ell = \mu_\ell = 0$.

Donc $x = 0_E$ ce qui est absurde.

. Ainsi $(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_p + \mu_p) \neq (0, \dots, 0)$

Donc $\boxed{(x_1, \dots, x_p) \text{ est liée}}$

3- Soit $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell x_\ell$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$,

Or : $$\lambda_\ell = \frac{\lambda_\ell + |\lambda_\ell|}{2} + \frac{\lambda_\ell - |\lambda_\ell|}{2}$$
$$= \frac{\lambda_\ell + |\lambda_\ell|}{2} - \frac{|\lambda_\ell| - \lambda_\ell}{2}$$

posons $\alpha_\ell = \dfrac{\lambda_\ell + |\lambda_\ell|}{2}$, on a $\alpha_\ell \geq 0$

$\beta_\ell = \dfrac{|\lambda_\ell| - \lambda_\ell}{2}$, on a $\beta_\ell \geq 0$

et $$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k + \sum_{\ell=1}^{p} \beta_\ell (-x_\ell).$$

Donc $\boxed{(x_1, \dots, x_p, -x_1, \dots, -x_p) \text{ est positivement génératrice de } E.}$

4-a) . D'après 2-a, $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E donc $p \geq n$.

. Si $p = n$, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E donc est libre, ce qui est absurde d'après 2-b.

Donc $p \neq n$.

Ainsi $\boxed{p \geq n+1.}$

b) Soit $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell e_\ell .$$

Posons $\alpha = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$, on a : $\alpha \geq 0$ et :

$$x = \sum_{l=1}^{n} (\lambda_l + \alpha) e_l - \sum_{l=1}^{n} \alpha e_l$$
$$= \sum_{l=1}^{n} (\lambda_l + \alpha) e_l + \alpha\left(-\sum_{l=1}^{n} e_l\right)$$

Or, soit $l \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_l + \alpha = \underbrace{\lambda_l + |\lambda_l|}_{\geq 0} + \sum_{j \neq l} |\lambda_j|$

Ainsi $\boxed{\left(e_1, \dots, e_n, -\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \text{ est positivement génératrice de } E}$

c) D'après 4.b, E admet une famille génératrice ayant $n+1$ éléments.

Or, d'après 4.a, $n+1$ est un minorant du nombre de vecteurs d'une famille positivement génératrice de E

Donc $\boxed{\text{le nombre minimal d'éléments d'une famille positivement génératrice de E est : } n+1.}$