CORRECTION
DM 9

Partie A :

1) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$.

Ainsi $\deg (X-a)P' \leq n$

D'où $\deg \Psi_a(P) \leq n$. Donc $\Psi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

• Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi_a(\lambda P+\mu Q) &= 2(\lambda P+\mu Q) + (X-a)(\lambda P+\mu Q)' \\ &= \lambda(2P + (X-a)P') + \mu(2Q+(X-a)Q') \\ &= \lambda \Psi_a(P) + \mu \Psi_a(Q)\end{aligned}$$

• Ainsi $\boxed{\Psi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

2-a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\Psi_a(X^k) = \begin{cases} 2X^k + (X-a).kX^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 2 & \text{si } k=0 \end{cases}$$

Donc $$\boxed{\Psi_a(X^k) = \begin{cases} (2+k)X^k - akX^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 2 & \text{si } k=0 \end{cases}}$$

b) On a : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg \Psi_a(X^k) = k$

Donc $(\Psi_a(X^k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi l'image de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par Ψ_a est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\boxed{\Psi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X])}$$

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\Psi_a(Q_k) = \begin{cases} 2(X-a)^k + (X-a).k(X-a)^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 2 & \text{si } k=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2+k)(X-a)^k & \text{si } k \neq 0 \\ 2 & \text{si } k=0 \end{cases}$$

Dans tous les cas : $\boxed{\Psi_a(Q_k) = (2+k)(X-a)^k}$.

3-a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}((X-a)^2P(X))' &= 2(X-a)P(X) + (X-a)^2P'(X) \\ &= (X-a)(2P(X) + (X-a)P'(X))\end{aligned}$$

Donc $\boxed{((X-a)^2P(X))' = (X-a)\Psi_a(P)}$.

①

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, soit $x \in \mathbb{R}$,

- si $x \neq a$,

$$\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2} \left[(t-a)^2 P(t) \right]_a^x$$

$$= P(x)$$

- si $x = a$

$$\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = \frac{\Psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(a)}{2} = P(a) = P(x)$$

Donc $\boxed{\Phi_a(\Psi_a(P)) = P}$.

c) On a : $\Phi_a \circ \Psi_a = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$

Or $\Psi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X])$, ainsi $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$

D'où $\boxed{\Phi_a \in GL(\mathbb{R}_n[X]) \text{ et } \Phi_a^{-1} = \Psi_a}$

Partie B :

1-a) h est une primitive de $t \mapsto t f(t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

donc $\boxed{h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = x f(x).}$

b) f est continue sur le segment $[0,x]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha_x, \beta_x \in [0,x]$ tels que : $\forall t \in [0,x]$, $f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$

Ainsi $\int_0^x f(\alpha_x)\, t\,dt \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq \int_0^x t f(\beta_x)\,dt$ ②

D'où : $\boxed{f(\alpha_x)\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,dt}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a donc :

$$f(\alpha_x)\frac{x^2}{2} \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x)\frac{x^2}{2}$$

D'où $\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$

Or $\alpha_x, \beta_x \in [0,x]$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha_x = \lim\limits_{x\to 0^+} \beta_x = 0$

et, comme f est continue, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\alpha_x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(\beta_x) = f(0)$.

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$

On raisonne de même sur le segment $[x,0]$, il existe alors $\alpha'_x, \beta'_x \in [x,0]$ tels que :

$$f(\alpha'_x)\int_x^0 t\,dt \leq \int_x^0 t f(t)\,dt \leq f(\beta'_x)\int_x^0 t\,dt$$

On obtient donc $-\frac{f(\alpha'_x)}{2} \leq -\frac{h(x)}{x^2} \leq -\frac{f(\beta'_x)}{2}$

Ce qui donne : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$

2) • $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

Ainsi $\lim_{x \to 0} \Phi(f)(x) = \frac{f(0)}{2} = \Phi(f)(0)$

Donc $\Phi(f)$ est continue en 0.

• Comme h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\Phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi $\boxed{\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\Phi(f)'(x) = \frac{x f(x) \cdot x^2 - \left(\int_0^x t f(t)\,dt\right) 2x}{x^4}$$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{2}{x^3} \int_0^x t f(t)\,dt$$

Donc $\boxed{\Phi(f)'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\Phi(f)(x)\right)}$

3-a) • Supposons f paire, soit $x \in \mathbb{R}^*$, on effectue le changement de variable $u = -t$, on a $du = -dt$

$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{-x} t f(t)\,dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u) f(-u)(-du)$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\,du = \Phi(f)(x)$$

et $\Phi(f)(-0) = \Phi(f)(0)$

Donc $\boxed{\Phi(f) \text{ est paire}}$.

• Supposons f impaire, soit $x \in \mathbb{R}^*$, de même:

$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u) f(-u)(-du) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u)\,du$$

$$= -\Phi(f)(x)$$

et $\Phi(f)(0) = 0 = -\Phi(f)(0)$

Donc $\boxed{\Phi(f) \text{ est impaire.}}$

b) Supposons $f \geq 0$

• Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in [0, x]$, $t f(t) \geq 0$ donc $\int_0^x t f(t)\,dt \geq 0$

Ainsi $\Phi(f)(x) \geq 0$

• Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $\forall t \in [x, 0]$, $t f(t) \leq 0$ donc $\int_x^0 t f(t)\,dt \leq 0$

D'où $\int_0^x t f(t)\,dt \geq 0$ donc $\Phi(f)(x) \geq 0$.

Ainsi $\boxed{\Phi(f) \geq 0.}$

4-a) Supposons $\lim_{+\infty} f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \geq A$.

$$\left| \int_0^x t f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_0^A t f(t)\,dt + \int_A^x t f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^A t|f(t)|\,dt + \int_A^x t|f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^A t\,|f(t)|\,dt + \int_A^x t\,\varepsilon\,dt$$

$$\left| \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^A t\,|f(t)|\,dt + \varepsilon \frac{x^2 - A^2}{2x^2}$$

$$\leq \frac{1}{x^2} \int_0^A t\,|f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $\int_0^A t\,|f(t)|\,dt$ est une constante, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^A t\,|f(t)|\,dt = 0$$

Donc il existe $A' \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant A' \Rightarrow \frac{1}{x^2} \int_0^A t\,|f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $x \geqslant \max(A, A')$, on a alors :

$$|\Phi(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $\boxed{\lim_{+\infty} \Phi(f) = 0}$

b) On a : $\lim_{+\infty} (f - \ell) = 0$, donc $\lim_{+\infty} \Phi(f - \ell) = 0$.

Or, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Phi(f - \ell)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t\,(f(t) - \ell)\,dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\,dt - \frac{\ell}{x^2} \frac{x^2}{2}$$

$$= \Phi(f)(x) - \frac{\ell}{2}$$

Donc : $\boxed{\lim_{+\infty} \Phi(f) = \frac{\ell}{2}}$

c) Posons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$, alors $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

et $\lim_{+\infty} g = \lim_{-\infty} f = \ell$ donc $\lim_{+\infty} \Phi(g) = \frac{\ell}{2}$

Or, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Phi(g)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(-t)\,dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{-x} (-u) f(u)(-du)$$

$$= \Phi(f)(-x)$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \Phi(f)(-x) = \frac{\ell}{2}$, ainsi $\lim_{x \to -\infty} \Phi(f)(+x) = \frac{\ell}{2}$

D'où : $\boxed{\lim_{-\infty} \Phi(f) = \frac{\ell}{2}}$

Partie C :

1), D'après B.c), $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{h(x)^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{h(x)^2}{x^3} = \frac{h(x)^2}{x^4} \cdot x$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{h(x)^2}{x^3} = 0}$

2) Soient $\alpha > 0$, $X > \alpha$, on effectue l'intégration par parties :

$u(x) = h(x)^2$ $\qquad u'(x) = 2h'(x)h(x) = 2xf(x)h(x)$

$v'(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$

On a :

$$\int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,dx = \left[-\frac{h(x)^2}{3x^3}\right]_\alpha^X + \frac{2}{3}\int_\alpha^X \frac{f(x)h(x)}{x^2}\,dx$$

Donc :

$$\boxed{\int_\alpha^X \frac{h(x)^2}{x^4}\,dx = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{h(\alpha)^2}{3\alpha^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx}$$

3) Soit $X > 0$, soit $\alpha \in]0, X[$, on a :

$$\int_\alpha^X \phi(f)(x)^2\,dx = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{h(\alpha)^2}{3\alpha^3} + \frac{2}{3}\int_\alpha^X f(x)\phi(f)(x)\,dx.$$

- $\phi(f)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, soit G une primitive de $\phi(f)^2$
  $f\cdot\phi(f)$ " H " $f\cdot\phi(f)$

On a : $G(X) - G(\alpha) = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{h(\alpha)^2}{3\alpha^3} + \frac{2}{3}(H(X) - H(\alpha))$

Or G et H sont continues sur $\mathbb{R}^+$, donc $\lim_{\alpha \to 0} G(\alpha) = G(0)$

et $\lim_{\alpha \to 0} H(\alpha) = H(0)$. Ainsi :

$$G(X) - G(0) = -\frac{h(X)^2}{3X^3} + \frac{2}{3}(H(X) - H(0))$$
$$\leq \frac{2}{3}(H(X) - H(0))$$

D'où : $$\boxed{\int_0^X \phi(f)(x)^2\,dx \leq \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\phi(f)(x)\,dx.}$$