CORRECTION DS 1

Exercice 1 :

1) La contraposée de P est :

$$\boxed{a+b+ab=-1 \Rightarrow (a=-1 \text{ ou } b=-1)}$$

2) • Supposons que $a+b+ab=-1$.
Alors $a+b+ab+1=0$ donc $(a+1)(b+1)=0$.
Ainsi $a=-1$ ou $b=-1$
Donc : $\boxed{\text{la contraposée de P est vraie.}}$

• Ainsi : $\boxed{\text{P est vraie.}}$

3) Supposons $a=-1$ ou $b=-1$, alors $(a+1)(b+1)=0$
donc $a+b+ab=-1$.
Ainsi la réciproque de la contraposée de P est vraie.
Donc $\boxed{\text{la réciproque de P est vraie.}}$

Exercice 2 :

Analyse : Supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $4m=a^2-b^2$.
• Si a et b sont de parité différente, alors a^2 et b^2 sont de parité différente donc a^2-b^2 est impair, ce qui est absurde car $4m$ est pair.
• Ainsi a et b sont de même parité donc $a+b$ et $a-b$ sont pairs. Donc il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $a+b=2k_1$ et $a-b=2k_2$.
• On a donc $4m=(a+b)(a-b)=4k_1k_2$, donc $m=k_1k_2$. Or m est premier et $a-b \leq a+b$ donc $k_2 \leq k_1$, ainsi $k_2=1$ et $k_1=m$.
Donc $a+b=2m$ et $a-b=2$.
Ainsi $2a=2m+2$ et $2b=2m-2$.
D'où $a=m+1$ et $b=m-1$.

Synthèse : Posons $a=m+1$ et $b=m-1$.
On a : $a, b \in \mathbb{N}$ et $a^2-b^2=(m+1)^2-(m-1)^2=4m$.
Donc a et b conviennent.

Conclusion : $\boxed{\exists!\ (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ 4m=a^2-b^2.}$

Exercice 3 :

1) • les diviseurs de 1 sont : 1 donc : $u_1=1$
• " 2 : 1, 2 " $u_2=1$
• " 3 : 1, 3 " $u_3=3$
• " 4 : 1, 2, 4 " $u_4=1$
• " 5 : 1, 5 " $u_5=5$

2) Comme $2n+1$ est impair, $2n+1$ est un diviseur impair de $2n+1$ et tout diviseur de $2n+1$ est inférieur ou égal à $2n+1$, donc : $\boxed{u_{2n+1}=2n+1.}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit d un diviseur impair de n, alors d est un diviseur impair de $2n$.
- Soit d un diviseur impair de $2n$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $2n = dk$. Comme d est impair, k est pair donc il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2k'$.
Ainsi $n = dk'$ donc d est un diviseur impair de n.
- Ainsi les diviseurs impairs de n sont les diviseurs impairs de $2n$ donc : $\boxed{u_{2n} = u_n}$.

4) - Pour $n = 1$,
$u_{n+1} + \dots + u_{2n} = u_2 = 1 = n^2$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $u_{n+1} + \dots + u_{2n} = n^2$.

$$u_{n+2} + \dots + u_{2(n+1)} = (u_{n+1} + \dots + u_{2n}) + u_{2n+1} + u_{2n+2} - u_{n+1}$$
$$= n^2 + u_{2n+1} + u_{2n+2} - u_{n+1}$$
$$= n^2 + 2n+1 + u_{n+1} - u_{n+1}$$
d'après 2 et 3
$$= n^2 + 2n + 1$$
$$= (n+1)^2$$

- Donc, par récurrence :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} + \dots + u_{2n} = n^2.}$$

Exercice 4 :

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3$$
$$+ a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$$
Donc : $\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.}$

2) - Pour $n = 0$, $2^{4^n} - 2 = 2^1 - 2 = 0$
donc $7 \mid 2^{4^n} - 2$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $7 \mid 2^{4^n} - 2$.
$$2^{4^{n+1}} - 2 = 2^{4^n \cdot 4} - 2 = (2^{4^n})^4 - 2$$
$$= ((2^{4^n} - 2) + 2)^4 - 2$$
$$= (2^{4^n} - 2)^4 + 4(2^{4^n} - 2)^3 \cdot 2 + 6(2^{4^n} - 2)^2 \cdot 2^2$$
$$+ 4(2^{4^n} - 2) \cdot 2^3 + 2^4 - 2$$
Or $7 \mid 2^{4^n} - 2$ et $2^4 - 2 = 14$ donc $7 \mid 2^4 - 2$.
Ainsi $7 \mid 2^{4^{n+1}} - 2$.

- Donc, par récurrence :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 7 \mid 2^{4^n} - 2.}$$

Exercice 5 :

1) Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $0 = f(n)$

On $f(n) \geq n$ donc $0 \geq n$. Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n = 0$.

Ainsi $\boxed{f(0) = 0.}$

2) Supposons $f(n+1) \neq n+1$.

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = f(k)$.

On $f(k) \geq k$ donc $n+1 \geq k$. De plus $k \neq n+1$

donc $k \in [\![0, n]\!]$, ainsi $f(k) = k$.

D'où $n+1 = k \in [\![0, n]\!]$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{f(n+1) = n+1.}$

3). Analyse : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$ et $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m = f(n)$

- Pour $n = 0$, $f(n) = f(0) = 0 = n$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [\![0, n]\!], f(k) = k$.

  D'après 2, $f(n+1) = n+1$.
- Donc, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

. Synthèse : Posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{array}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$, $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m = f(n)$
(en posant $n = m$)

Donc f convient.

. Conclusion : L'unique solution est : $\boxed{f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{array}.}$

Problème 1 :

1-a) . exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par opérations sur les fonctions dérivables : $\boxed{g \text{ est dérivable.}}$

. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = 2e^x(e^x - 1) + 2e^x - e^x - 1$

$= 2e^x(e^x - 1) + e^x - 1$

$= (2e^x + 1)(e^x - 1)$

Donc $\boxed{h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2e^x + 1 \end{array} \text{ convient.}}$

b). Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $h(x) = 2e^x + 1 > 0$

donc $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

. On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

c) $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

Donc, d'après le tableau de variations de g :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) \geq 0.}$

2- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $g(u_n) \geq 0$

Donc $e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n \geq 0$

Ainsi $e^{2u_n} - e^{u_n} \geq u_n$, donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

3) • Pour $n=0$, $u_n = a = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 0$.

On a : $u_{n+1} = e^0 - e^0 = 0$

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 0.}$$

4 - a) • Pour $n = 0$, $u_n = a$ et $a < 0$ donc $u_n \leq 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \leq 0$.

Alors $2u_n \leq u_n$ donc $e^{2u_n} \leq e^{u_n}$.

Ainsi $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \leq 0$

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq 0.}$$

b) (u_n) est croissante et majorée par 0 donc :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$$

c) Posons $\ell = \lim u_n$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$

donc, par passage à la limite :

$$\ell = e^{2\ell} - e^{\ell}.$$

Donc $g(\ell) = 0$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) > 0$ et $g(0) = 0$.

Donc $\ell = 0$.

Ainsi : $\boxed{\lim u_n = 0.}$

5-a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$

Or (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$ donc $u_n \geq a$.

De plus g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n, a \in \mathbb{R}^+$,

donc $g(u_n) \geq g(a)$.

Ainsi $\boxed{u_{n+1} - u_n \geq g(a).}$

b) • Pour $n=0$, $u_n = a$, $a + ng(a) = a$

donc $u_n \geq a + ng(a)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \geq a + ng(a)$.

On a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ donc, en

sommant : $u_{n+1} - u_n + u_n \geq a + ng(a) + g(a)$.

Ainsi : $u_{n+1} \geq a + (n+1)g(a)$

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq a + ng(a)}$$

c) Comme $a > 0$, $g(a) > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n g(a)) = +\infty$.

Ainsi, par comparaison : $\boxed{\lim u_n = +\infty.}$

Problème 2 :

1-a) . φ est dérivable par opérations sur les fonctions dérivables.

. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\varphi'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

Comme $e^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x+1$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$			
φ	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) . Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$ et φ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$,

donc : $\forall x \in]-\infty, -1[$, $\varphi(x) < -1$.

Ainsi : $\forall x \in]-\infty, -1[$, $\varphi(x) \neq 0$.

. $\varphi(-1) = -e^{-1} - 1 < 0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc $0 \in [\varphi(-1), \lim\limits_{+\infty} \varphi[$.

De plus φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que

$\varphi(\alpha) = 0$.

. Ainsi, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, c'est-à-dire : $\boxed{\alpha e^{\alpha} = 1.}$

c) D'après le tableau de variations :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in]-\infty, \alpha[, & \varphi(x) < 0 \\ & \varphi(\alpha) = 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, & \varphi(x) > 0. \end{array}}$$

2-a) . On a : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

. Soit $x \in]0, +\infty[$,

$f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x}\right) = e^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{x}{e^x}\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) . exp et ln sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

. Soit $x \in]0, +\infty[$,

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(xe^x - 1) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$,

donc :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\alpha + \frac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, f admet un minimum égal à $f(\alpha)$. Or :

$f(\alpha) = e^{\alpha} - \ln(\alpha)$.

De plus $\alpha e^{\alpha} = 1$ donc $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln(\alpha)$

Donc $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un minimum égal à } \alpha + \frac{1}{\alpha}.}$

3-a). Comme $\varphi(1) = e - 1 > 0$, on a $\alpha < 1$ donc

f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

- f est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$
- $f(1) = e < 3 < n$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

ainsi $n \in [f(1), +\infty[$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\boxed{f(x) = n \text{ admet une unique solution dans } [1, +\infty[.}$

b) Soit $n \geq 3$, on a : $n \leq n+1$

donc $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$

Supposons $x_n > x_{n+1}$. Comme f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $x_n, x_{n+1} \in [1, +\infty[$, alors $f(x_n) > f(x_{n+1})$ ce qui est absurde.

Donc $x_n \leq x_{n+1}$.

Ainsi $\boxed{(x_n)_{n \geq 3} \text{ est croissante.}}$

c) Soit $p > 3$, $f(\ln p) = e^{\ln p} - \ln(\ln p)$
$= p - \ln(\ln p)$

Or $\ln p > \ln 3 > \ln e = 1$ donc $\ln(\ln p) \geq 0$

Ainsi $\boxed{f(\ln p) \leq p.}$

d) Soit $n \geq 3$, $f(\ln n) \leq n$ donc $f(\ln n) \leq f(x_n)$

Or f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $\ln n, x_n \in [1, +\infty[$, donc, de même qu'en 3.b,

$\ln n \leq x_n$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$.

Donc, par comparaison :

$\boxed{\lim x_n = +\infty.}$