CORRECTION DS2

Exercice 1 :

On a : $\begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq j \leq k \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$

Donc
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^j 3^{k-j}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j 3^{k-j} - 3^k \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left((2+3)^k - 3^k \right) \quad \text{d'après le binôme de Newton}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 5^k - \sum_{k=1}^{n} 3^k$$
$$= \frac{5-5^{n+1}}{1-5} - \frac{3-3^{n+1}}{1-3}$$

Donc $\boxed{S_n = \frac{5^{n+1}-5}{4} - \frac{3^{n+1}-3}{2}}$

Exercice 2 :

1) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$a = 2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}} \right)$$
$$= 2\left(\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} - \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}} \right)$$

$$a = 2\left(\frac{n!(2n-k)!}{(2n)!(n-k)!} - \frac{n!(2n-k-1)!}{(2n)!(n-k-1)!} \right)$$
$$= 2\frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{(2n-k)!}{(n-k)!} - \frac{(2n-k-1)!(n-k)}{(n-k)!} \right)$$
$$= \frac{2n!}{(2n)!(n-k)!}\left((2n-k-1)!(2n-k) - (2n-k-1)!(n-k) \right)$$
$$= \frac{2n!(2n-k-1)!}{(2n)!(n-k)!}\left(2n-k-(n-k) \right)$$
$$= \frac{2n \cdot n!(2n-k-1)!}{(2n)!(n-k)!} = \frac{n!(2n-k-1)!}{(2n-1)!(n-k)!}$$
$$= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(2n-1)!}{k!(2n-1-k)!}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

Donc : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}} \right)}$

2) Posons : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ u_k = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2(u_k - u_{k+1})$$
$$= 2(u_0 - u_n) \quad \text{par sommes télescopiques}$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}}\right)$$

Donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\left(1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)}$

Exercice 3 :

1) Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$,

$$S_p + S_{n-p-1} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-p-1}\binom{n}{k}$$

$$\underset{j=n-k}{=} \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} + \sum_{j=p+1}^{n}\binom{n}{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} + \sum_{k=p+1}^{n}\binom{n}{k}$$

(par symétrie des coefficients binomiaux)

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Donc $\boxed{S_p + S_{n-p-1} = 2^n.}$

2) On a : $\sum_{p=0}^{n-1}(S_p + S_{n-p-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} 2^n$

Donc $\sum_{p=0}^{n-1} S_p + \sum_{p=0}^{n-1} S_{n-p-1} = n\,2^n$

Or $\sum_{p=0}^{n-1} S_{n-p-1} \underset{k=n-p-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$

Ainsi $2\sum_{p=0}^{n-1} S_p = n\,2^n$

Donc $\boxed{\sum_{p=0}^{n-1} S_p = n\,2^{n-1}}$

Exercice 4 :

1) $$\frac{\sin(3y)}{\sin(y)} = \frac{\sin(2y+y)}{\sin(y)} = \frac{\sin(2y)\cos(y) + \sin(y)\cos(2y)}{\sin(y)}$$

$$= \frac{2\sin(y)\cos^2(y) + \sin(y)\cos(2y)}{\sin(y)}$$

$$= 2\cos^2(y) + \cos(2y)$$

$$= \cos(2y) + 1 + \cos(2y)$$

Donc $\boxed{\frac{\sin(3y)}{\sin(y)} = 2\cos(2y) + 1}$

2) $$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + 2\cos\left(2\frac{\pi}{2\times 3^k}\right)\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(3\times\frac{\pi}{2\times 3^k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^k}\right)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^k}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^n}\right)}$$ par produit télescopique

Donc : $\boxed{P_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2\times 3^n}\right)}.}$

Exercice 5 :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

- $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x}$.

  Comme $\lfloor . \rfloor$ est croissante : $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

- $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$ donc $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq x$

  Comme $\lfloor . \rfloor$ est croissante : $\lfloor \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \rfloor \leq \lfloor x \rfloor$

  Donc $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq \lfloor x \rfloor$, ainsi $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor}$

  D'où $\lfloor \lfloor \sqrt{x} \rfloor \rfloor \leq \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

  Donc $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

- Donc : $\boxed{\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor}$

Exercice 6 :

1) - $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.
   - $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   et $\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1$

   $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{5}-2}{16}$$
   $$= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{16} > 0$$

   Donc $\frac{1+\sqrt{5}}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Ainsi $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\cos\frac{\pi}{4}, \cos 0\right[$.

   - Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

   $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[\text{ tel que } \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$

2) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$

   $$= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{5}-2}{8}$$

   Donc $\boxed{\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

3) $\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1$

   $$= \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{-2\sqrt{5}-2}{8} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

   Donc $\boxed{\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha)}$

4) On a $\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha)$ donc $\cos(4\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$

   Ainsi $4\alpha \equiv \pi - \alpha \ [2\pi]$ ou $4\alpha \equiv \alpha - \pi \ [2\pi]$

   D'où $5\alpha \equiv \pi \ [2\pi]$ ou $3\alpha \equiv -\pi \ [2\pi]$

   Donc $\alpha \equiv \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$ ou $\alpha \equiv -\frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$

   Or $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{5}.}$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$,

   $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{5} \ [2\pi]$

   Donc l'ensemble des solutions est :

   $\boxed{\left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Exercice 7 :

1) • Pour $n=1$, $|u_n| = |1| = 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|u_k| = 1$.

. si $n+1$ est pair, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2j$

Donc $|u_{n+1}| = |u_{2j}| = |u_j| = 1$ car $j \in [\![1, n]\!]$.

. si $n+1$ est impair, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2j+1$

Donc $|u_{n+1}| = |u_{2j+1}| = |(-1)^j u_j| = |u_j| = 1$

car $j \in [\![1, n]\!]$

Dans tous les cas : $|u_{n+1}| = 1$.

• Donc, par récurrence forte : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| = 1}$.

2) $$\sum_{k=1}^{4n} u_k u_{k+2} = \sum_{j=1}^{2n} u_{2j} u_{2j+2} + \sum_{j=0}^{2n-1} u_{2j+1} u_{2j+3}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} u_j u_{j+1} + \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j u_j (-1)^{j+1} u_{j+1} + u_1 u_3$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} u_j u_{j+1} - \sum_{j=1}^{2n-1} u_j u_{j+1} + u_1 u_3$$

$$= u_{2n} u_{2n+1} - 1$$

$$= (-1)^n u_n^2 - 1$$

Or $|u_n| = 1$ donc $u_n^2 = 1$.

Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^{4n} u_k u_{k+2} = (-1)^n - 1}$

Problème 1 :

1-a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x - \cos x = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sin x . \cos\frac{\pi}{4} - \cos x . \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} \equiv \pi - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi [2\pi]$$

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, si $\sin x < 1$ ou $\cos x > -1$,

alors $6 \sin x - 2\cos x < 8$

Donc, si $6 \sin x - 2\cos x = 8$, alors $\sin x = 1$ et $\cos x = -1$

Ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{l'équation n'a pas de solution}}$.

2-a) f est dérivable et, soit $x \in]-\pi, \pi[$,

$$f'(x) = \frac{(-2\sin x - 6\cos x)(1+\cos x) - (2\cos x - 6\sin x + 8)(-\sin}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \left(-2\sin x - 2\cos x \cancel{2\sin} x - 6\cos x - 6\cos^2 x + 2\cos\cancel{x\sin} x - 6\sin^2 x + 8\sin x\right) \times \frac{1}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{-6\cos x + 6\sin x - 6}{(1+\cos x)^2} = \frac{6(\sin x - \cos x - 1)}{(1+\cos x)^2}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{6(\sin x - \cos x - 1)}{(1+\cos x)^2}}$

b). $\lim\limits_{x \to -\pi} (2\cos x - 6\sin x + 8) = 6$

$\lim\limits_{x \to -\pi} (1+\cos x) = 0$ et $\forall x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, $1+\cos x > 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to (-\pi)^+} f(x) = +\infty}$

• $\lim\limits_{x \to \pi} (2\cos x - 6\sin x + 8) = 6$

$\lim\limits_{x \to \pi} (1+\cos x) = 0$ et $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $1+\cos x > 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty}$.

c). Soit $x \in]-\pi, \pi[$, $f'(x)$ est du signe de $\sin x - \cos x - 1$.

On a : $\sin x - \cos x - 1 \geq 0 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Or, d'après les variations de sin, on a :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x \mapsto \sin(x-\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	-1 ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	1 ↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\sin x - \cos x - 1 \geq 0 \iff x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

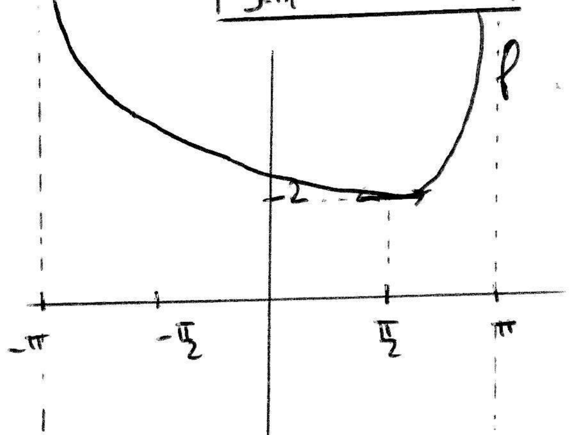
Ainsi :

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖

d) D'après le tableau de variations f admet un minimum en $\frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{-6+8}{1+0} = 2$

Donc $\boxed{\min\limits_{]-\pi,\pi[} f = 2}$

e)



3-a) f est continue et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

donc $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est bijective de } [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ \text{vers } I = [f(\frac{\pi}{2}), \lim\limits_{\pi^-} f[= [2, +\infty[. \end{array}}$

b) On a : $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ donc $\boxed{f^{-1}(2) = \frac{\pi}{2}}$.

c) $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \ f'(x) \neq 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $I \setminus \{f(\frac{\pi}{2})\}$,

ainsi $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]2, +\infty[.}$

d) f et f^{-1} ont la même monotonie donc

$\boxed{f^{-1} \text{ est strictement croissante sur } I.}$

4-a) tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim\limits_{(-\frac{\pi}{2})^+} \tan, \lim\limits_{(\frac{\pi}{2})^-} \tan[$
$= \mathbb{R}$

donc $\boxed{\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \text{ est bijective.}}$

b) . tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$

donc $\boxed{\text{Arctan est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\text{Arctan}\, x)}$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}\, x)}$$

Donc $\boxed{\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.}$

c) i) Soit $x \in]-\pi, \pi[$, soit $y \in \mathbb{R}$,

$y = g(x) \iff y = \tan \frac{x}{2}$

$\iff \text{Arctan}\, y = \frac{x}{2}$ car $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\iff x = 2\,\text{Arctan}(y)$

Donc $\boxed{g \text{ est bijective et } g^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[\\ x \mapsto 2\,\text{Arctan}(x) \end{array}}.$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = 2\,\text{Arctan}(x)$

Donc, comme Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\boxed{\begin{array}{l} g^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et :} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ (g^{-1})'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}. \end{array}}$

5-a) . h est continue

. h est dérivable et, soit $x \in [1, +\infty[$, $h'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

Donc : $\forall x \in]1, +\infty[$, $h'(x) > 0$ et $h'(1) = 0$

donc h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

. Donc $\boxed{\begin{array}{l} h \text{ est bijective de } [1, +\infty[\text{ vers} \\ J = [h(1), \lim\limits_{+\infty} h[= [2, +\infty[. \end{array}}$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$, soit $y \in [2, +\infty[$,

$y = h(x) \iff 3x^2 - 6x + 5 = y$

$\iff 3x^2 - 6x + 5 - y = 0$

Le discriminant associé à $3X^2 - 6X + 5 - y = 0$ est

$$\Delta = 36 - 12(5-y) = -24 + 12y = 12(y-2) \geq 0$$

$$y = h(x) \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{12(y-2)}}{6}$$

$$\iff x = 1 \pm \sqrt{\frac{y-2}{3}}$$

$$\iff x = 1 + \sqrt{\frac{y-2}{3}} \quad \text{car } x \geq 1$$

Donc $\boxed{\begin{array}{rcl} h^{-1} : [2, +\infty[& \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & 1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}} \end{array}}$

6-a) • $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}$

$$= \frac{\cos(2 \cdot \frac{x}{2})}{1}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(x).}$

• $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = 2\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \cdot \cos^2(\frac{x}{2})$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$$

Donc $\boxed{\dfrac{2t}{1+t^2} = \sin(x).}$

b) Soit $x \in]-\pi, \pi[$, on a : $\cos(x) = \dfrac{1-g^2(x)}{1+g^2(x)}$

et $\sin(x) = \dfrac{2g(x)}{1+g^2(x)}$, donc :

$$f(x) = \frac{2\frac{1-g^2(x)}{1+g^2(x)} - 6 \cdot \frac{2g(x)}{1+g^2(x)} + 8}{1 + \frac{1-g^2(x)}{1+g^2(x)}}$$

$$= \frac{2(1-g^2(x)) - 12g(x) + 8(1+g^2(x))}{1+g^2(x) + 1 - g^2(x)}$$

$$= \frac{10 - 12g(x) + 6g^2(x)}{2} = 5 - 6g(x) + 3g^2(x)$$

$$= h(g(x))$$

Donc $\boxed{f = h \circ g}$

c) Soit $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, soit $y \in [2, +\infty[$

$$y = f(x) \iff y = h \circ g(x)$$

$$\iff h^{-1}(y) = g(x)$$

$$\iff g^{-1} \circ h^{-1}(y) = x$$

$$\iff 2\,\mathrm{Arctan}(h^{-1}(y)) = x$$

$$\iff x = 2\,\mathrm{Arctan}\left(1 + \sqrt{\frac{y-2}{3}}\right)$$

Donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f^{-1} : [2, +\infty[& \to & [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ x & \mapsto & 2\,\mathrm{Arctan}\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right) \end{array}}$

d) Soit $x \in \left]2, +\infty\right[$,

$$(f^{-1})'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{1 + \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^2}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x-2}\left(1 + \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^2\right)}}$$