CORRECTION DS3

Exercice 1 :

1) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

2) • Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} + 2 \, \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x - 2x^2}{(x^2+1)^2} + 2 \, \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x - 2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{4}{2 + 2x^2}$$

$$= \frac{2 - 2x - 2x^2 - 2(1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x(1+2x)}{(x^2+1)^2}}$$

3)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$1+2x$		$-$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-\pi$ || $-\frac{1}{2}+\pi$	$\searrow$	$2\,\text{Arctan}\,3$	$\nearrow$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

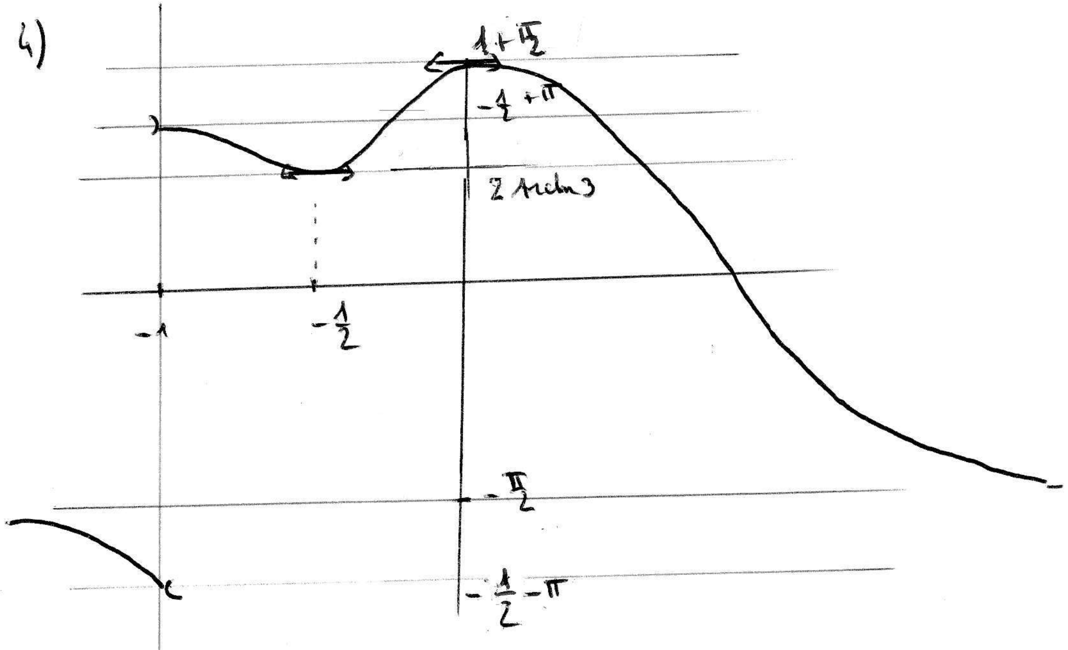
car • $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$

• $f(0) = 1 + 2\,\text{Arctan}(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$

• $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\,\text{Arctan}\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 2\,\text{Arctan}(3)$

• $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x \to (-1)^\pm} \frac{1-x}{1+x} = \pm\infty$

4)



Exercice 2 :

- Le discriminant associé est :

$$\Delta = 1 - 4(1+i)\frac{(1-i)}{2} = 1-4 = -3.$$

- Les racines sont : $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2(1+i)}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2(1+i)}$

- $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $1-i\sqrt{3} = \overline{1+i\sqrt{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\quad z_1 = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

et $\quad z_2 = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

Donc les solutions sont : $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ et } \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$.

Exercice 3 :

- L'équation caractéristique associée est : $r^2-2r+2=0$.
  Son discriminant est $\Delta=-4$, ses racines sont $\frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$
- Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \lambda(1+i)^n + \mu(1-i)^n.$$

- $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda(1+i)+\mu(1-i) = -2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2i\lambda = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = i \\ \mu = -i \end{cases}$$

- Soit $n\in\mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} u_n &= i(1+i)^n - i(1-i)^n \\ &= i\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n - i\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= (\sqrt{2})^n i\left(e^{in\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\ &= (\sqrt{2})^n i \times 2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = -2(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$

Exercice 4 :

Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\int^x \frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{ch}t+1}e^t\,dt = \int^x \frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}+1}e^t\,dt = \int^x \frac{e^t+e^{-t}-2}{e^t+e^{-t}+2}e^t\,dt$$

On effectue le changement de variable $u=e^t$.

On a : $du = e^t\,dt$.

$$\int^x \frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{ch}t+1}e^t\,dt = \int^{e^2} \frac{u+\frac{1}{u}-2}{u+\frac{1}{u}+2}\,du$$

$$\int^x \frac{\mathrm{ch}\,t-1}{\mathrm{ch}\,t+1} e^t dt = \int^{e^x} \frac{u^2+1-2u}{u^2+1+2u} du$$

$$= \int^{e^x} \frac{u^2+1+2u-4u}{u^2+1+2u} du$$

$$= \int^{e^x} \left(1-2\cdot\frac{2u+2}{u^2+2u+1}+\frac{4}{u^2+2u+1}\right) du$$

$$= \int^{e^x} \left(1-2\,\frac{2u+2}{u^2+2u+1}+\frac{4}{(u+1)^2}\right) du$$

$$= \left[u-2\ln(u^2+2u+1)-\frac{4}{u+1}\right]^{e^x}$$

$$= e^x-2\ln\left((e^x+1)^2\right)-\frac{4}{e^x+1}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1} e^x$ est

$$\boxed{x \mapsto e^x-4\ln(e^x+1)-\frac{4}{e^x+1}}$$

Problème 1 :

1) $f\left(\frac{-3+2\sqrt{3}i}{3}\right) = \dfrac{\frac{-3+2\sqrt{3}i}{3} - 1}{\frac{-3+2\sqrt{3}i}{3} + 1} = \dfrac{-6+2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$= \sqrt{3}i + 1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\boxed{f\left(\frac{-3+2\sqrt{3}i}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}.$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$, posons $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$f(z) \in \mathbb{U} \iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$

$\iff |z-1|^2 = |z+1|^2$

$\iff (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$

$\iff x - 1 = \pm(x+1)$

$\iff -1 = 1$ ou $2x = 0$

$\iff x = 0$

Donc $\boxed{f(z) \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}}$

3) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$, posons $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$|f(z)| = \sqrt{2} \iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^2 = 2$

$\iff (x-1)^2 + y^2 = 2\left((x+1)^2 + y^2\right)$

$\iff 2(x+1)^2 - (x-1)^2 + y^2 = 0$

$|f(z)| = \sqrt{2} \iff x^2 + 6x + 1 + y^2 = 0$

$\iff (x+3)^2 - 8 + y^2 = 0$

$\iff (x+3)^2 + y^2 = 8$

$\iff |x+3+iy|^2 = 8$

$\iff |z+3| = 2\sqrt{2}$

Donc : $\boxed{|f(z)| = \sqrt{2} \iff |z+3| = 2\sqrt{2}}$.

4-a) . Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$

$f(z) = \omega \iff \frac{z-1}{z+1} = \omega$

$\iff z - 1 = \omega(z+1)$

$\iff (1-\omega)z = 1+\omega$

Donc

. si $\omega \neq 1$, l'équation admet une unique solution $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$

. si $\omega = 1$, l'équation n'a pas de solution.

b) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1\}$,

. $f(z) = 1$ n'a pas de solution donc $f(z) \neq 1$

. $f(z) = 0 \iff z = 1$ donc $f(z) \neq 0$

. $f(z) = -1 \iff z = 0$ donc $f(z) \neq -1$

Ainsi : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\},\ f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}}$

5- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

$$f(z) = z \iff \frac{z-1}{z+1} = z \iff z-1 = z(z+1)$$
$$\iff z^2 = -1$$

Donc $\boxed{f(z) = z \iff z = \pm i}$

6-a) • u_0 est bien défini et $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons u_n défini et $u_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$

alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini et d'après 4.b

$$u_{n+1} \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

• Donc par récurrence :

$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$

b) Comme $f(i) = i$ et $f(-i) = -i$, alors

$\boxed{(u_n) \text{ est constante.}}$

c) • Pour $n = 0$, $u_n = u_0 \notin \{-i, i\}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \notin \{-i, i\}$.

On a $f(z) = i \iff z = i$ et $f(z) = -i \iff z = -i$

Donc $f(u_n) \notin \{-i, i\}$, ainsi $u_{n+1} \notin \{-i, i\}$

• Donc, par récurrence :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \notin \{-i, i\}.}$

7-a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} + i}$$

$$= \frac{u_n - 1 - i(u_n + 1)}{u_n - 1 + i(u_n + 1)} = \frac{(1-i)u_n - 1 - i}{(1+i)u_n - 1 + i}$$

Or $1 + i = i(1 - i)$ donc :

$$v_{n+1} = \frac{(1-i)u_n - i(1-i)}{i(1-i)u_n - (1-i)} = \frac{u_n - i}{iu_n - 1}$$

$$= \frac{u_n - i}{i(u_n + i)} = \frac{1}{i}\,\frac{u_n - i}{u_n + i} = -i\,v_n$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } -i.}$

b) • On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-i)^n v_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+4} = (-i)^{n+4} v_0$
$$= (-i)^4 (-i)^n v_0$$
$$= (-i)^n v_0 = v_n$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est 4-périodique.}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = (-i)^n v_0 = \frac{u_n - i}{u_n + i}$

Donc $u_n - i = (-i)^n v_0 (u_n + i)$

D'où $u_n(1 - (-i)^n v_0) = i(1 + (-i)^n v_0)$

Donc $u_n = i\,\dfrac{1+(-i)^n v_0}{1-(-i)^n v_0}$

Or $v_0 = \dfrac{u_0 - i}{u_0 + i}$ donc $u_n = i\,\dfrac{u_0 + i + (-i)^n (u_0 - i)}{u_0 + i - (-i)^n (u_0 - i)}$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = i\,\dfrac{u_0(1+(-i)^n) + i(1-(-i)^n)}{u_0(1-(-i)^n) + i(1+(-i)^n)}}$

Problème 2: **Partie 1:**

1) Soit $x \in]0,+\infty[$, soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) + x(bx+c)}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(x^2+1)}.$$

Pour $a = 1$, $c = 0$ et $b = -1$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)}}$$

2) Soit $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$

Donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ sont :

$$\boxed{\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \\ &\quad = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C \end{aligned}}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

3) Soit $x \in]0,+\infty[$, on calcule $\int^x t \ln t \, dt$.

On effectue l'intégration par parties :

$u(t) = \ln t$ $\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t$ $\qquad v(t) = \frac{t^2}{2}$.

On a : $$\int^x t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\, dt = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Donc une primitive de $x \mapsto x \ln x$ est :

$$\boxed{\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}}$$

4) Soit $x \in]0,+\infty[$, on calcule $\int^x (1-t^2)\ln t \, dt$.

On effectue l'intégration par parties :

$u(t) = \ln t$ $\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1 - t^2$ $\qquad v(t) = t - \frac{t^3}{3}$

On a : $$\int^x (1-t^2)\ln t \, dt = \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln t\right]^x - \int^x \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) dt = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$$

Donc une primitive de $x \mapsto (1-x^2)\ln x$ est

$$\boxed{\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9} \end{aligned}}$$

Partie 2 :

1) Soit $\alpha > 0$, posons $y : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$. y est deux fois dérivable

et :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]0,+\infty\right[\ (1+x^2)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 2x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ x^{\alpha-2}\left(\alpha(\alpha-1)(1+x^2) - 2\alpha^2 + 2x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ (\alpha(\alpha-1) - 2\alpha + 2)x^2 + \alpha(\alpha-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha-1) - 2(\alpha-1) = 0 \\ \alpha(\alpha-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad \text{car } \alpha > 0$$

Donc, $\boxed{x \mapsto x^\alpha \text{ est solution de } (E_0) \text{ ssi } \alpha = 1}$

2-a) Ψ est un quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc :

$\boxed{\Psi \text{ est deux fois dérivable.}}$

b) Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$, on a :

$\varphi(x) = x\Psi(x)$

$\varphi'(x) = \Psi(x) + x\Psi'(x)$

$\varphi''(x) = 2\Psi'(x) + x\Psi''(x)$.

Donc $(1+x^2)\varphi'' - 2x\varphi' + 2\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)(2\Psi' + x\Psi'') - 2x(\Psi + x\Psi') + 2x\Psi = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1+x^2)\Psi'' + 2\Psi' = 0$$

$$(1+x^2)\varphi'' - 2x\varphi' + 2\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \Psi'' + \frac{2}{x(1+x^2)}\Psi' = 0$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est solution de } (E_0) \text{ ssi } \Psi' \text{ est solution de } (E')}$.

3) D'après la partie 1, une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}$ est $x \mapsto 2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$

Donc les solutions de (E') sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} = \lambda\frac{x^2+1}{x^2} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

4) $\varphi \in S_0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \Psi'(x) = \lambda\frac{x^2+1}{x^2} = \lambda\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \Psi(x) = \lambda\left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \varphi(x) = \lambda(x^2-1) + \mu x.$$

Donc les solutions de (E_0) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x \end{array},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Partie 3 :

1- Soit y une fonction deux fois dérivable. On a :

$$y \in S \iff (1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 \ln x$$

$$\iff (1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)\varphi_0'' - 2x\varphi_0' + 2\varphi_0$$

$$\iff (1+x^2)(y-\varphi_0)'' - 2x(y-\varphi_0)' + 2(y-\varphi_0) = 0$$

$$\iff y - \varphi_0 \in S_0$$

$$\iff \exists g \in S_0,\ y = \varphi_0 + g$$

Donc $\boxed{S = \{\varphi_0 + g,\ g \in S_0\}}$.

2- a) • λ, μ, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2-1$ sont dérivables donc φ_0 est dérivable

• Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi_0'(x) = \lambda(x) + x\lambda'(x) + 2x\mu(x) + (x^2-1)y'(x)$$

Donc : $\boxed{\varphi_0'(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)}$

b) • λ, μ, $x \mapsto x$ sont dérivables donc φ_0' est dérivable ainsi φ_0 est deux fois dérivable.

• Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$\boxed{\varphi_0''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)}.$$

c) $(1+x^2)\varphi_0'' - 2x\varphi_0' + 2\varphi_0 = (1+x^2)^2 \ln(x)$

$$\iff (1+x^2)(\lambda' + 2\mu + 2x\mu') - 2x(\lambda + 2x\mu) + 2(\cancel{x\lambda} + (x^2-1)\mu) = (1+x^2)^2 \ln x$$

$$\iff (1+x^2)\lambda' + 2x(1+x^2)\mu' + \left(2(1+x^2) \cancel{-4x^2} + 2(x^2-1)\right)\mu = (1+x^2)^2 \ln x$$

$$\iff (1+x^2)\lambda' + 2x(1+x^2)\mu' = (1+x^2)^2 \ln x$$

$$\iff \lambda' + 2x\mu' = (1+x^2)\ln x$$

Donc $\boxed{\varphi_0 \text{ est solution de (E) ssi : } \forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x}$.

d) $\begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \left(2x - \frac{x^2-1}{x}\right)\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{x}L_1$$

$$\iff \begin{cases} \lambda'(x) = -\frac{x^2-1}{x}\mu'(x) \\ \frac{x^2+1}{x}\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} \lambda'(x) = (1-x^2)\ln x \\ \mu'(x) = x\ln x \end{cases}}.$$

e) D'après la partie 1, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \begin{cases} \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9} + C_1 \\ \mu(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_2 \end{cases}}$$

3- • D'après 2, $\varphi_0 :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2}{2}(x^2-1)\ln x - \frac{x^2}{4}(x^2-1)$$

est solution particulière de (E), c'est-à-dire :

$$\varphi_0 :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right)\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4.$$

• D'après 1, les solutions de (E) sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_0 :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right)\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{36}x^4 + \lambda(x^2-1) + \mu x \end{aligned} \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$