$$\boxed{\text{CORRECTION DS 4}}$$

Exercice 1 :

- Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ donc $y \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$ donc $y = f(x) \in B$. Ainsi $y \in f(A) \cap B$.

  Donc : $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.

- Soit $y \in f(A) \cap B$. Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et on a $y \in B$. Donc $f(x) \in B$, ainsi $x \in f^{-1}(B)$.

  Donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$, d'où $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

  Ainsi : $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.

- Donc : $\boxed{f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B}$

Exercice 2 :

- Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

  Alors $h \circ g \circ f(x_1) = h \circ g \circ f(x_2)$.

  Or $h \circ g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$, ainsi f est injective.

- Soit $y \in F$, comme $f \circ h \circ g$ est surjective, il existe $z \in G$ tel que $y = f \circ h \circ g(z)$. Posons $x = h \circ g(z)$.

  On a $x \in E$ et $y = f(x)$.

  Donc f est surjective.

- Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective}}$

- Donc $h \circ g \circ f \circ f^{-1} = h \circ g$ est injective et $f^{-1} \circ f \circ h \circ g = h \circ g$ est surjective.

  Ainsi $h \circ g$ est bijective.

- Soit $x_1, x_2 \in G$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$.

  Alors $g \circ f \circ h(x_1) = g \circ f \circ h(x_2)$.

  Or $g \circ f \circ h$ est injective donc $x_1 = x_2$, ainsi h est injective.

- Soit $y \in E$, comme $h \circ g$ est surjective, il existe $z \in F$ tel que $y = h \circ g(z)$. Posons $x = g(z)$.

  On a $x \in G$ et $y = h(x)$ donc h est surjective.

- Ainsi $\boxed{h \text{ est bijective}}$.

- Donc $\boxed{h^{-1} \circ h \circ g = g \text{ est bijective}}$.

Exercice 3 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n \frac{(n+1)-(n-1)}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2} = n \frac{2}{\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^2}$$

Donc : $\lim u_n = \frac{2}{2^2}$, d'où : $\boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = e^{n^2 \ln(1+\frac{2}{n})} = e^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \ln(1+\frac{2}{n})}$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}} = 1$

Donc $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

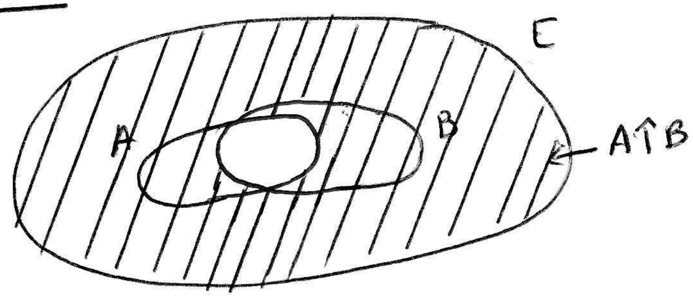
Donc $\frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n} - 1$

Or $\lim \left(\frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim u_n = -1}$.

Problème 1 :

1-a)



b) Soit $x \in E$,

$x \in A \uparrow B \iff x \notin A$ ou $x \notin B$

$\iff x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$

$\iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

Donc : $\boxed{A \uparrow B = \bar{A} \cup \bar{B}}$

c) • $A \uparrow A = \bar{A} \cup \bar{A}$ donc $\boxed{A \uparrow A = \bar{A}}$

• $A \uparrow E = \bar{A} \cup \emptyset$ donc $\boxed{A \uparrow E = \bar{A}}$

• $A \uparrow \emptyset = \bar{A} \cup E$ donc $\boxed{A \uparrow \emptyset = E}$

2- • D'après 1.b, $A \cup B = \bar{A} \uparrow \bar{B}$

Donc d'après 1.c, $\boxed{A \cup B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)}$

• $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \overline{A \uparrow B}$

Donc $\boxed{A \cap B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)}$

3-a) • Supposons $A \subset B$.

$A \uparrow (B \uparrow B) = A \uparrow \bar{B} = \bar{A} \cup B$

. Soit $x \in E$,

. si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $x \in \bar{A} \cup B$

. si $x \in \bar{A}$, alors $x \in \bar{A} \cup B$

Dans tous les cas, $x \in \bar{A} \cup B$ donc $E \subset \bar{A} \cup B$.

Comme $\bar{A} \cup B \subset E$, on a : $\bar{A} \cup B = E$

Donc $A \uparrow (B \uparrow B) = E$.

- Supposons $A \uparrow (B \uparrow B) = E$.

On a : $\overline{A} \cup B = E$

Soit $x \in A$, on a $x \in E = \overline{A} \cup B$ et comme $x \notin \overline{A}$, $x \in B$

donc $A \subset B$.

- Ainsi : $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow A \uparrow (B \uparrow B) = E}$

b) $A \uparrow B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \overline{A} = \emptyset$ et $\overline{B} = \emptyset$

Donc $\boxed{A \uparrow B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = E}$

c) $A \uparrow B = A \uparrow C \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{C}$

$\Leftrightarrow \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{C}}$

Donc $\boxed{A \uparrow B = A \uparrow C \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C}$.

4-a) On a $A \uparrow X = B$ donc $\overline{A} \cup \overline{X} = B$

Ainsi $A \cup B = A \cup \overline{A} \cup \overline{X} = E \cup \overline{X}$

Donc $\boxed{A \cup B = E}$

b) Supposons $A \cup B = E$, alors :

$A \uparrow \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$

Soit $x \in \overline{A}$, $x \in E = A \cup B$ et $x \notin A$ donc $x \in B$,

ainsi $\overline{A} \subset B$. Donc $A \uparrow \overline{B} = B$

Donc $\boxed{\overline{B} \text{ est solution de } (*)}$

c) Supposons $A \cup B = E$.

- Analyse : Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \uparrow X = B$

On a $\overline{A} \cup \overline{X} = B$

Donc : • $\overline{X} \subset B$, ainsi $\overline{B} \subset X$.

• $\overline{B} = A \cap X$ donc $\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup (A \cap X)$

$= (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cap X)$

$= \overline{A} \cap X$

donc $X \subset \overline{A} \cap X = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ainsi $\overline{B} \subset X \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Synthèse : Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\overline{B} \subset X \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

Alors $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{X} \subset B$

Donc $A \cap B \subset \overline{X} \subset B$

D'où $\overline{A} \cup (A \cap B) \subset \overline{A} \cup \overline{X} \subset \overline{A} \cup B$.

Or $\overline{A} \cup B = A \uparrow \overline{B} = B$ d'après 4. b

et $\overline{A} \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) = \overline{A} \cup B = B$

Donc $\overline{A} \cup \overline{X} = B$ ainsi $A \uparrow X = B$

- Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } (*) \text{ sont les } X \in \mathcal{P}(E) \text{ telsque } \overline{B} \subset X \subset \overline{A} \cup \overline{B}}$

d) L'ensemble des solutions de (*) est

$$\boxed{\begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } A \cup B \neq E \\ \{X \in \mathcal{P}(E),\ \overline{B} \subset X \subset \overline{A \cup B}\} & \text{si } A \cup B = E. \end{array}}$$

Problème 2 :

1- . Soit $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

Donc f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

. f est dérivable et, sur $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

Donc :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{+\infty} f = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{0} f = 0$

2- . f est continue et strictement croissante sur $]0, e]$

donc f est bijective de $]0, e]$ vers $]\lim\limits_{0} f, f(e)]$

Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective de }]0, e] \text{ vers }]0, e^{\frac{1}{e}}]}$.

. On a : $\forall x \in]0, e[$, $f'(x) \neq 0$ et $f'(e) = 0$

Donc $\boxed{\text{la bijection réciproque de } f \text{ est dérivable sur }]0, e^{\frac{1}{e}}[\text{ et pas en } e^{\frac{1}{e}}.}$

3 - On a : $\Phi_1 = 1$, donc $\boxed{(t_n) \text{ est constante égale à } 1.}$

4- . Φ_x est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \Phi_x(t_n)$

donc, par passage à la limite : $\boxed{h(x) = \Phi_x(h(x))}$

. On a donc : $h(x) = x^{h(x)}$ or $x > 0$ donc $h(x) > 0$.

Ainsi $(h(x))^{\frac{1}{h(x)}} = \left(x^{h(x)}\right)^{\frac{1}{h(x)}} = x$.

Donc : $\boxed{f(h(x)) = x.}$

5- Soit $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_x(t) = e^{t \ln x}$, or $\ln x > 0$ et exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\Phi_x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

6- . Pour $n = 0$, $t_0 = 1$, $t_1 = x^{t_0} = x > 1$

donc $t_0 < t_1$.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $t_n < t_{n+1}$.

Comme Φ_x est strictement croissante : $\Phi_x(t_n) < \Phi_x(t_{n+1})$

Donc $t_{n+1} < t_{n+2}$.

. Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_n < t_{n+1}}.$$

7- • Pour $n=0$, $t_0 = 1 \leq e$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $t_n \leq e$.

$$t_{n+1} = x^{t_n} \leq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_n \leq e}$

• La suite (t_n) est croissante et majorée, donc : $\boxed{(t_n) \text{ est convergente.}}$

8- • Supposons (t_n) convergente, alors (t_n) converge vers $h(x)$ qui vérifie, d'après 4, $f(h(x)) = x$.

Donc $f(h(x)) > e^{\frac{1}{e}}$.

Or f est majorée par $e^{\frac{1}{e}}$ ce qui est absurde.

Donc (t_n) diverge.

• Comme (t_n) est croissante, on a : $\boxed{\lim t_n = +\infty.}$

9- • Soit $t \in \mathbb{R}$, $\phi_x(t) = e^{t \ln x}$, or $\ln x < 0$ et exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $\boxed{\phi_x \text{ est strictement décroissante.}}$

• Ainsi $\boxed{\phi_x \circ \phi_x \text{ est strictement croissante}}$

10- • Pour $n=0$, $t_0 = 1$, $t_1 = x < 1$ donc $t_1 < t_0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $t_{2n+1} < t_{2n}$

Comme $\phi_x \circ \phi_x$ est strictement croissante, on a :

$$\phi_x \circ \phi_x(t_{2n+1}) < \phi_x \circ \phi_x(t_{2n})$$

Donc $\phi_x(t_{2n+2}) < \phi_x(t_{2n+1})$

Ainsi $t_{2n+3} < t_{2n+2}$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_{2n+1} < t_{2n}.}$

11- • Pour $n=0$,

$t_0 = 1$, $t_1 = x$, $t_2 = x^x = e^{x \ln x}$

or $x \ln x < 0$ donc $t_2 < 1$. Ainsi $t_2 \leq t_0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $t_{2(n+1)} \leq t_{2n}$

Comme $\phi_x \circ \phi_x$ croissante, alors $\phi_x \circ \phi_x(t_{2(n+1)}) \leq \phi_x \circ \phi_x(t_{2n})$

Donc $t_{2(n+2)} \leq t_{2(n+1)}$

• Ainsi, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2(n+1)} \leq t_{2n}$.

Donc $\boxed{(t_{2n}) \text{ est décroissante.}}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $t_{2(n+1)} \leq t_{2n}$ et ϕ_x décroissante

donc $\phi_x(t_{2(n+1)}) \geq \phi_x(t_{2n})$

Donc $t_{2(n+1)+1} \geq t_{2n+1}$

Ainsi $\boxed{(t_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$

12- . Comme (t_{2n+1}) croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_1 \leq t_{2n+1} \leq t_{2n}$

Donc (t_{2n}) est minorée par t_1 et comme (t_{2n}) est décroissante, $\boxed{(t_{2n}) \text{ est convergente}}$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq t_{2n} \leq t_0 \leq 1$,

$\lim t_{2n} \in [0,1]$.

- De même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_1 \leq t_{2n+1} \leq t_{2n} \leq t_0$

Donc $\boxed{(t_{2n+1}) \text{ est convergente}}$ et $\lim t_{2n+1} \in [0,1]$.

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2(n+1)} = \phi_x \circ \phi_x (t_{2n})$

$t_{2(n+1)+1} = \phi_x \circ \phi_x (t_{2n+1})$

et $\phi_x \circ \phi_x$ est continue. Donc, par passage à la limite : $\lim t_{2n} = \phi_x \circ \phi_x (\lim t_{2n})$

et $\lim t_{2n+1} = \phi_x \circ \phi_x (\lim t_{2n+1})$

Donc $\boxed{\text{leurs limites sont des points fixes de } \phi_x \circ \phi_x \text{ dans } [0,1]}$

13- ϕ_x est dérivable donc g est dérivable.

Soit $t \in [0,1]$,

$g'(t) = \phi_x'(t) . \phi_x' \circ \phi_x (t) - 1$

Or $\phi_x(t) = e^{t \ln x}$ donc $\phi_x'(t) = \ln x . e^{t \ln x}$

$= \ln x . \phi_x(t)$.

D'où : $g'(t) = \ln x . \phi_x(t) . \ln x . \phi_x(\phi_x(t)) - 1$

Donc $\boxed{g'(t) = (\ln x)^2 \phi_x(t) . \phi_x \circ \phi_x (t) - 1}$.

14- a) . $g'(0) = (\ln x)^2 x - 1$

Or $-1 \leq \ln x \leq 0$ donc $(\ln x)^2 \leq 1$ et $0 \leq x < 1$

Donc $(\ln x)^2 . x < 1$

Ainsi $\boxed{g'(0) < 0}$

- D'après le tableau de variations de g', on a : $g' < 0$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0,1]}$.

b) . $g(0) = \phi_x(\phi_x(0)) - 0 = \phi_x(1) = x \geqslant 0$

$g(1) = \phi_x(\phi_x(1)) - 1 = \phi_x(x) - 1 = x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$

≤ 0 car $x \ln x \leq 0$

- g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

$0 \in [g(1), g(0)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g admet un unique zéro dans $[0,1]$ donc :

$\boxed{\phi_x \circ \phi_x \text{ admet un unique point fixe dans } [0,1]}$.

c) Notons ℓ l'unique point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$.

D'après 12, $\lim t_{2n} = \lim t_{2n+1} = \ell$.

Donc $\boxed{(t_n) \text{ converge.}}$

15-a) On a $e^{-e} \leq x < \frac{1}{e}$ donc $-e \leq \ln x < -1$

Ainsi $-1 \leq e^{-1}\ln x < -e^{-1}$

D'où $e^{-1} < -e^{-1}\ln x \leq 1$

Donc $\boxed{\beta \leq 0}$.

b) Le tableau de variations de g' montre que

$\forall t \in [0,1] \setminus \{\beta\}$, $g'(t) < 0$ et $g'(\beta) \leq 0$

Donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Ainsi, en appliquant le même raisonnement qu'à la question précédente :

$\boxed{(t_n) \text{ converge.}}$

16- a). On a : $\Phi_x(r)$ et r donc :

$g'(r) = (\ln x)^2 \cdot \Phi_x(r) \cdot \Phi_x \circ \Phi_x(r) - 1$

$= (\ln x)^2 \cdot r \cdot r - 1$

Donc $= (\ln x)^2 \cdot r^2 - 1$

Or : $\Phi_x(r) = r$ donc $x^r = r$ ainsi $r \ln x = \ln r$

Donc $\boxed{g'(r) = (\ln r)^2 - 1}$.

- On a $\ln r < -1$ donc $(\ln r)^2 > 1$

Ainsi $\boxed{g'(r) > 0}$.

b) - $\Phi_x(r) = r$ donc $\Phi_x \circ \Phi_x(r) = r$.

Ainsi r est un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ et compte $g'(r) > 0$,

$r \in]\gamma, \delta[$.

- g est strictement croissante sur $[\gamma, \delta]$ donc

$g(\gamma) < g(r) < g(\delta)$ ainsi $g(\gamma) < 0 < g(\delta)$.

- g est continue et strictement décroissante sur $[0, \gamma]$ et $g(0) = x > 0$, $g(\gamma) \leq 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g admet un unique zéro r_1 sur $[0,\gamma]$ et $r_1 \in]0, \gamma[$.

- De même g admet un unique zéro r sur $[\gamma, \delta]$ et $r \in]\gamma, \delta[$.

et g admet un unique zéro r_2 sur $[\delta, 1]$ et $r_2 \in]\delta, 1[$ car $g(1) = x^x - 1 < 0$

Donc $\boxed{\Phi_x \circ \Phi_x \text{ admet trois points fixes } r_1, r, r_2 \text{ tels que : } 0 < r_1 < \gamma < r < \delta < r_2 < 1.}$

8

c) • Pour $n=0$, $t_0 = 1$ donc $r_2 \leq t_0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $r_2 \leq t_{2n}$.

Comme $\phi_x \circ \phi_x$ est croissante : $\phi_x \circ \phi_x(r_2) \leq \phi_x \circ \phi_x(t_{2n})$

Donc $r_2 \leq t_{2(n+1)}$

• Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_2 \leq t_{2n}.}$

• Posons $l_1 = \lim t_{2n}$. Comme l_1 est un point fixe de $\phi_x \circ \phi_x$, $l_1 \in \{r_1, r, r_2\}$ et, par passage à la limite : $r_2 \leq l_1$.

Donc $l_1 = r_2$, ainsi $\boxed{\lim t_{2n} = r_2.}$

d) Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $t_{2n_0+1} > r$.

Alors, comme ϕ_x est strictement décroissante,

$$\phi_x(t_{2n_0+1}) < \phi_x(r)$$

Donc $$t_{2(n_0+1)} < r$$

Or $r_2 \leq t_{2(n_0+1)}$ donc $r_2 < r$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_{2n+1} \leq r.}$

e) • Posons $l_2 = \lim t_{2n+1}$. De même qu'en c, $l_2 \in \{r_1, r, r_2\}$ et $l_2 \leq r$. Donc $\boxed{\lim t_{2n+1} = r \text{ ou } r_1.}$

• On a donc $\lim t_{2n} \neq \lim t_{2n+1}$,

donc $\boxed{(t_n) \text{ ne converge pas.}}$