$$\boxed{\begin{array}{c}\text{CORRECTION}\\ \text{DS 1}\end{array}}$$



__Exercice 1 :__

1-a-i) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{N}$

$$g(t^k x) - g(t^{k+1}x) = \left(f(t^k x) - f(t^{k+1}x)\right) - \left(f(t^{k+1}x) - f(t^{k+2}x)\right)$$
$$= f(t^k x) - 2f(t.t^k x) + f(t^2.t^k x)$$

Donc, d'après l'hypothèse appliquée à $t^k x$,

$$g(t^k x) - g(t^{k+1}x) = (t^k x)^2$$

Donc $\boxed{g(t^k x) - g(t^{k+1}x) = t^{2k}x^2}$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(g(t^k x) - g(t^{k+1}x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}x^2$$

Donc, par somme télescopique

$$g(x) - g(t^n x) = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k$$
$$= x^2 \frac{1-(t^2)^n}{1-t^2}$$

Donc $\boxed{g(x) - g(t^n x) = x^2 \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}}$.

iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \in ]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$, donc, comme $g$ est continue, $\lim_{n\to+\infty} g(t^n x) = g(0)$

Or $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} g(t^n x) = 0$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-t^{2n}}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2}$.

Donc, par passage à la limite,

$$\boxed{g(x) = \frac{x^2}{1-t^2}}.$$

b-i) On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(tx) = \frac{x^2}{1-t^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{N}$,

$$f(t^k x) - f(t^{k+1}x) = f(t^k x) - f(t.t^k x)$$
$$= \frac{(t^k x)^2}{1-t^2} = \frac{t^{2k}x^2}{1-t^2}$$

- Donc, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(t^k x) - f(t^{k+1}x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}x^2}{1-t^2}$$

Donc, par somme télescopique,

$$f(x) - f(t^n x) = \frac{x^2}{1-t^2}\sum_{k=0}^{n-1}(t^2)^k$$

D'où $f(x) - f(t^n x) = \frac{x^2}{1-t^2}\,\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$

Ainsi $\boxed{f(x) - f(t^n x) = x^2 \dfrac{1-t^{2n}}{(1-t^2)^2}}$

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n x = 0$ et $f$ est continue, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n x) = f(0)$

Ainsi, par passage à la limite,

$$\boxed{f(x) - f(0) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2}.}$$

2). **Analyse**: Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x^2$$

Alors, d'après 1, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x^2}{(1-t^2)^2}$

Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = a + \frac{x^2}{(1-t^2)^2}$$

- **Synthèse**: Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a + \dfrac{x^2}{(1-t^2)^2}\end{array}$

 - $f$ est continue.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x)$$
$$= \cancel{a} + \frac{x^2}{(1-t^2)^2} - 2\left(\cancel{a} + \frac{(tx)^2}{(1-t^2)^2}\right) + \cancel{a} + \frac{(t^2 x)^2}{(1-t^2)^2}$$

Donc $f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x)$

$$= \frac{x^2(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2} = \frac{x^2(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = x^2$$

- **Conclusion**: les solutions sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a + \dfrac{x^2}{(1-t^2)^2}\end{array},\quad a \in \mathbb{R}.}$$

**Exercice 2**:

1- Soit $k \in \mathbb{R}$, soit $f$ constante égale à $k$.

Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0 \iff 3k = 0 \iff k = 0$

Donc $\boxed{\text{la seule fonction constante solution est } f = 0.}$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$$

Comme $f$ est $\mathcal{C}^\infty$, en dérivant $n$ fois cette relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad a^n f^{(n)}(ax) + b^n f^{(n)}(bx) + c^n f^{(n)}(cx) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, en appliquant le résultat précédent à $\frac{x}{c}$, on a :

$$a^n f^{(n)}\left(\frac{a}{c}x\right) + b^n f^{(n)}\left(\frac{b}{c}x\right) + c^n f^{(n)}(x).$$

Donc $\boxed{f^{(n)}(x) = -\dfrac{a^n}{c^n} f\left(\dfrac{a}{c}x\right) - \dfrac{b^n}{c^n} f^{(n)}\left(\dfrac{b}{c}x\right)}$

b) On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^n}{c^n}+\frac{b^n}{c^n}\right)=0<1$ car $0<\frac{a}{c}<1$ et $0<\frac{b}{c}<1$

Donc, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\boxed{\frac{a^N}{c^N}+\frac{b^N}{c^N}<1}$

c) Comme $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $|f^{(N)}|$ est continue sur le segment $[-A,A]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes,

$\boxed{|f^{(N)}| \text{ admet un maximum sur } [-A,A]}$

d) Soit $x\in[-A,A]$,

$$|f^{(N)}(x)| = \left|-\frac{a^N}{c^N}f^{(N)}\left(\frac{ax}{c}\right)-\frac{b^N}{c^N}f^{(N)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right|$$

$$\leq \frac{a^N}{c^N}\left|f^{(N)}\left(\frac{ax}{c}\right)\right| + \frac{b^N}{c^N}\left|f^{(N)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right|$$

Or $\frac{ax}{c}\in\left[-\frac{aA}{c},\frac{aA}{c}\right]$ et comme $0<\frac{a}{c}<1$,

$\frac{ax}{c}\in[-A,A]$, ainsi $\left|f^{(N)}\left(\frac{ax}{c}\right)\right|\leq M_A$.

De même $\left|f^{(N)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right|\leq M_A$.

Donc : $\boxed{|f^{(N)}(x)|\leq\left(\frac{a^N}{c^N}+\frac{b^N}{c^N}\right)M_A}$.

e) • Supposons $M_A\neq0$, alors $M_A>0$ et comme $\left(\frac{a^N}{c^N}+\frac{b^N}{c^N}\right)<1$,

on a : $\left(\frac{a^N}{c^N}+\frac{b^N}{c^N}\right)M_A<M_A$

Donc : $\forall x\in[-A,A]$, $|f^{(N)}(x)|<M_A$

Or $M_A=\max_{[-A,A]}|f^{(N)}|$ donc il existe $x_0\in[-A,A]$ tel que $M_A=|f^{(N)}(x_0)|$

Donc $M_A=|f^{(N)}(x_0)|<M_A$ ce qui est absurde.

D'où : $\boxed{M_A=0}$

• On a alors : $\forall x\in[-A,A]$, $|f^{(N)}(x)|\leq0$

Donc $\forall x\in[-A,A]$, $f^{(N)}(x)=0$

Donc $f^{(N)}=0$ sur $[-A,A]$.

Or $\mathbb{R}=\bigcup_{A\in\mathbb{R}^{+*}}[-A,A]$ donc $f^{(N)}=0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{f^{(N)}=0}$.

f) Comme $f^{(N)}=0$, il existe $a_1\in\mathbb{R}$ tel que $f^{(N-1)}=a_1$.

Ainsi, il existe $a_2\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(N-2)}(x)=a_1x+a_2$.

Donc il existe $a_3\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(N-3)}(x)=a_1\frac{x^2}{2}+a_2x+a_3$

En réitérant, $\boxed{f \text{ est de forme polynomiale}}$

3. • **Analyse** : Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$$

Alors $f$ est polynomiale.

• **Synthèse** : Soit $f$ une fonction polynomiale. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$

Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

$(\forall x \in \mathbb{R}, f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (a^\ell + b^\ell + c^\ell) x^\ell = 0$

$\iff \forall \ell \in [\![0, n]\!], \quad a_\ell (a^\ell + b^\ell + c^\ell) = 0$

$\iff \forall \ell \in [\![0, n]\!], \quad a_\ell = 0 \quad$ car $a^\ell + b^\ell + c^\ell > 0$

$\iff f = 0$

• **Conclusion** : L'unique solution est : $\boxed{f = 0}$.

**Exercice 3** :

1) Posons $h : [0,1] \to [0,1]$
$x \mapsto f(x) - x$

$h$ est continue sur $[0,1]$, $h(0) = f(0) \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f$ à valeurs dans $[0,1]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [0,1]$ tel que $h(a) = 0$. Donc :

$$\boxed{f(a) = a}$$

2. • Pour $n = 0$, $f(u_n) = f(a) = a = u_n$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $f(u_n) = u_n$.

$f(u_{n+1}) = f \circ g(u_n) = g \circ f(u_n) = g(u_n) = u_{n+1}$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_n}$.

3. • Comme $[0,1]$ est stable par $g$ et $u_0 \in [0,1]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$

• Donc $(u_n)$ est monotone et bornée donc converge vers $c \in [0,1]$.

• Comme $f$ est continue et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$, on a, par passage à la limite $f(c) = c$.

• Comme $g$ est continue, de même $g(c) = c$

Donc $\boxed{f(c) = g(c)}$.

4-a). • $(u_n)$ n'est pas croissante donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > u_{n+1}$, ainsi $f(u_n) > g(u_n)$

Donc $(f-g)(u_n) > 0$

• $(u_n)$ n'est pas décroissante donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m < u_{m+1}$, ainsi $f(u_m) < g(u_m)$

Donc $(f-g)(u_m) < 0$

D'où : $\boxed{(f-g)(u_n)\,(f-g)(u_m) \leq 0}$

b) $f-g$ est continue sur $[0,1]$ et $0 \in [(f-g)(u_m), (f-g)(u_n)]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe $c \in [u_m, u_n]$ tel que $(f-g)(c) = 0$.

Ainsi $c \in [0,1]$ et $\boxed{f(c) = g(c).}$

## Problème 1 :

1-a) $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

b)

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Donc $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) On a $B = I + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $B \in \mathcal{U}$.

De plus $A = PBP^{-1}$ donc en posant $Q = P^{-1}$, $A = Q^{-1}BQ$ avec $Q \in GL_3(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{A \text{ est semblable à } B \text{ qui est une matrice unipotente.}}$

2-a) Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2$. Il existe $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,
Donc $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \in \mathcal{N}.}$

b) Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2$, il existe $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $N_1 N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi $\boxed{N_1 N_2 \in \mathcal{N}.}$

c) Soit $N \in \mathcal{N}$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{N^3 = 0}$.

3-a) On a $I = I + 0 \in \mathcal{U}$.

et $1.I + 1.I = 2I \notin \mathcal{U}$

Donc $\boxed{\text{$\mathcal{U}$ n'est pas stable par combinaison linéaire.}}$

b) Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ tels que $U_1 = I + N_1$ et $U_2 = I + N_2$.

Ainsi $U_1 U_2 = I + N_1 + N_2 + N_1 N_2$.

Or $N_1 N_2 \in \mathcal{N}$ et comme $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire : $N_1 + N_2 + N_1 N_2 \in \mathcal{N}$.

D'où $U_1 U_2 \in \mathcal{U}$.

Ainsi $\boxed{\text{$\mathcal{U}$ est stable par produit.}}$

c) Soit $U \in \mathcal{U}$. $U$ est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux valent 1 donc sont tous différents de 0. Ainsi $U \in GL_3(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$

4-a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $N \in \mathcal{N}$ donc $N^2 \in \mathcal{N}$ d'après 2.a

Ainsi $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$ d'après 2.b.

Donc $\boxed{U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$U^n = (I + N)^n$

Comme $I$ et $N$ commutent, d'après le binôme de Newton :

$$U^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Or $N^3 = 0$ donc $\forall k \geq 3, \; N^k = 0$.

Ainsi, si $n \geq 2$, $U^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$
$= U^{(n)}$.

De plus, si $n = 0$, $U^{(n)} = I = U^n$
si $n = 1$ $U^{(n)} = I + N = U = U^n$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; U^{(n)} = U^n.}$

c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)\left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2\right)$$

$$= I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 + \beta N + \alpha\beta N^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta}{2}\cancel{N^3}$$

$$+ \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2 + \alpha\frac{\beta(\beta-1)}{2}\cancel{N^3} + \frac{\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\cancel{N^4}$$

$$= I + (\alpha+\beta)N + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\right)N^2$$

$$= I + (\alpha+\beta)N + \frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha\beta + \beta^2 - \beta}{2}N^2$$

$$= I + (\alpha+\beta)N + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}N^2$$

$$= U^{(\alpha+\beta)}$$

Donc : $\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}.}$

d) $\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^{(\beta)}$

Posons $N' = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2$, on a $N' \in \mathcal{N}$ donc :

$$\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = (I + N')^{(\beta)}$$

$$= I + \beta N' + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N'^2$$

$$= I + \beta\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2$$

$$= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1)}{2}N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2 N^2$$

$$\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1+\alpha\beta-\alpha)}{2}N^2$$

$$= I + \alpha\beta + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2 = U^{(\alpha\beta)}$$

Donc $\boxed{\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.}$

d) $U^{(-1)} = I - N + N^2$

Donc $U^{(-1)}U = (I - N + N^2)(I + N)$

$$= I - \cancel{N} + \cancel{N^2} + \cancel{N} - \cancel{N^2} + \cancel{N^3}$$

$$= I$$

Ainsi $\boxed{U^{(-1)} = U^{-1}.}$

5-a). Posons $C = B^{(\frac{1}{2})}$, on a $C^2 = \left(B^{(\frac{1}{2})}\right)^{(2)} = B^{(1)} = B$

Donc $C = B^{(\frac{1}{2})} = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $C = I + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

. On a $(-C)^2 = C^2 = B$ donc $\boxed{\text{C n'est pas unique}}$.

b) On a : $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1}$

$= PCP^{-1}PCP^{-1}$

Posons $\boxed{D = PCP^{-1}, \text{ on a : } A = D^2.}$

6-a). Comme $P, P^{-1}, U \in GL_3(\mathbb{R})$, alors

$\boxed{A = P^{-1}UP \in GL_3(\mathbb{R})}$

- $U^{-1} = U^{(-1)} = I - N + N^2$

et $A^{-1} = P^{-1}U^{-1}P$

donc $\boxed{A^{-1} \text{ est semblable à } I - N + N^2}$

b). On a : $A = P^{-1}UP = P^{-1}(I+N)P^{-1} = I + P^{-1}NP$

et $A^{-1} = P^{-1}U^{-1}P = P^{-1}(I - N + N^2)P = I + P^{-1}(N^2 - N)P$

- Si $A$ et $A^{-1}$ sont semblables, il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = Q^{-1}A^{-1}Q$

Donc $I + P^{-1}NP = I + Q^{-1}P^{-1}(N^2-N)PQ$

D'où $N = PQ^{-1}P^{-1}(N^2-N)PQP^{-1}$

$= (PQP^{-1})^{-1}(N^2-N)PQP^{-1}$

Donc $N$ et $N^2-N$ sont semblables.

- Si $N$ et $N^2-N$ sont semblables, il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = Q^{-1}(N^2-N)Q$

Donc $A = I + P^{-1}Q^{-1}(N^2-N)QP$

$= I + P^{-1}Q^{-1}(P(A^{-1}-I)P^{-1})QP$

$= I + P^{-1}Q^{-1}PA^{-1}P^{-1}QP - I$

$= (P^{-1}QP)^{-1}A^{-1}P^{-1}QP$

Donc $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.

- Ainsi $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables ssi } N \text{ et } N^2-N \text{ sont semblables.}}$

c) i-
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{ac} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b}{ac} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{ac}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow aL_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{ac} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + bL_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & ac \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow acL_3$$

Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & ac \end{pmatrix}}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

Donc $\boxed{Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & 0 & \frac{1}{ac} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N'.}$

iii) - $N'^2 = P^{-1}NP.P^{-1}NP = P^{-1}N^2P$

- Donc $N'^2 - N' = P^{-1}(N^2 - N)P = P^{-1}MP$

Donc $N'^2 - N'$ est semblable à $M$.

On a $N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N'^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est semblable à } M.}$

iv)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{QN'Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

v) On a $QN'Q^{-1} = N'^2 - N' = P^{-1}MP$

Ainsi $QP^{-1}NPQ^{-1} = P^{-1}MP$

Donc $M = PQP^{-1}NPQ^{-1}P^{-1}$

$= (PQ^{-1}P^{-1})^{-1} N PQ^{-1}P^{-1}$

Donc $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables}}$

Ainsi, d'après 6. b, $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.