CORRECTION DS 6

Exercice 1

1) • $\lim\limits_{x\to 0} (-\sin(2x)) = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

donc $\ln(1-\sin(2x)) \underset{0}{\sim} -\sin 2x$

$\underset{0}{\sim} -2x$

Ainsi $\left(\ln(1-\sin(2x))\right)^3 \underset{0}{\sim} -8x^3$

• $1-\cos(3x) \underset{0}{\sim} \dfrac{(3x)^2}{2}$ donc $x(1-\cos(3x)) \underset{0}{\sim} \dfrac{9x^3}{2}$

• Donc $\dfrac{(\ln(1-\sin 2x))^3}{x(1-\cos(3x))} \underset{0}{\sim} \dfrac{-8x^3}{\frac{9x^3}{2}} = -\dfrac{16}{9}$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1-\sin 2x))^3}{x(1-\cos 3x)} = -\dfrac{16}{9}}$.

2) Posons $h = x-1$.

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{2}{1-(h+1)^2} - \frac{3}{1-(h+1)^3}$$

$$= \frac{2}{-h^2-2h} - \frac{3}{-h^3-3h^2-3h}$$

$$= \frac{3}{h(h^2+3h+3)} - \frac{2}{h(h+2)}$$

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{3(h+2)-2(h^2+3h+3)}{h(h^2+3h+3)(h+2)}$$

$$= \frac{-2h^2-3h}{h(h^2+3h+3)(h+2)}$$

$$\underset{h\to 0}{\sim} \frac{-3h}{h.3.2} = -\frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) = -\dfrac{1}{2}}$

3) Posons $h = x-1$.

$$\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{\tan\frac{\pi x}{2}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)\right)}$$

Or $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi h}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{2}{\pi h}$

et $\ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi h}{4}\right)\right) = \ln\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi h}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi h}{4}}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi h}{4}}{1-\tan\frac{\pi h}{4}}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{2\tan\frac{\pi h}{4}}{1-\tan\frac{\pi h}{4}}\right)$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\tan\frac{\pi h}{4}}{1\tan\frac{\pi h}{4}} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

donc $\ln\left(1+\dfrac{2\tan\frac{\pi h}{4}}{1-\tan\frac{\pi h}{4}}\right) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{2\tan\frac{\pi h}{4}}{1-\tan\frac{\pi h}{4}}$

$\underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{2\cdot\frac{\pi h}{4}}{1}$

$\underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{\pi h}{2}$.

Donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)\right)$

$\underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{2}{\pi h}\cdot\dfrac{\pi h}{2} = -1$

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)\right) = -1$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{-1}.}$

4) . $\sqrt{ch(2x)} - 1 = \sqrt{1+ch2x-1} - 1$

On $\lim\limits_{x\to 0} ch(2x)-1 = 0$ et $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

Donc $\sqrt{ch2x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{ch(2x)-1}{2}$

$\underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x)^2}{2} = x^2$

. $\sqrt[3]{8+shx} - 2 = 2\left(\sqrt[3]{1+\frac{shx}{8}} - 1\right)$

$\underset{0}{\sim} 2\cdot\dfrac{1}{3}\dfrac{shx}{8}$

$\underset{0}{\sim} \dfrac{1}{12}x$

. Donc $\dfrac{\sqrt{ch(2x)}-1}{\sqrt[3]{8+shx}-2} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{\frac{1}{12}x} = 12x$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 12x = 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ch(2x)}-1}{\sqrt[3]{8+shx}-2} = 0}$$

Exercice 2 :

1- • Pour $x=0$, $f(x)=0$ et $x^2(1-x^2)=0$

Donc tout $d \in]0,1[$ vérifie $f(x) = \frac{f^{(4)}(d)}{24} x^2(1-x)^2$

• De même pour $x=1$.

Donc, $\boxed{\text{il existe } d \in]0,1[\text{ tel que } f(x) = \frac{f^{(4)}(d)}{24} x^2(1-x)^2}$

2- Soit $t \in [0,1]$, $h(t) = t^2(1-2t+t^2)$
$= t^2 - 2t^3 + t^4$.

Comme h est $\mathcal{C}^\infty$,

$h'(t) = 2t - 6t^2 + 4t^3$

$h''(t) = 2 - 12t + 12t^2$

$h^{(3)}(t) = -12 + 24t$

et $\boxed{h^{(4)}(t) = 24.}$

3-a) • $\varphi(0) = f(0) - A h(0) = 0$

$\varphi(1) = f(1) - A h(1) = 0$

$\varphi(x) = f(x) - A h(x) = 0$.

• φ est continue sur $[0,x]$ et sur $[x,1]$, dérivable sur $]0,x[$ et sur $]x,1[$ et $\varphi(0) = \varphi(x) = \varphi(1)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $a_1 \in]0,x[$ et $a_2 \in]x,1[$ tels que $\boxed{\begin{array}{c}\varphi'(a_1) = \varphi'(a_2) = 0 \\ \text{et on a : } a_1 < a_2.\end{array}}$

b). $\varphi'(0) = f'(0) - A h'(0) = 0$

$\varphi'(1) = f'(1) - A h'(1) = 0$

• φ' est continue sur $[0,a_1]$, $[a_1,a_2]$ et $[a_2,1]$, dérivable sur $]0,a_1[$, $]a_1,a_2[$ et $]a_2,1[$, et $\varphi'(0) = \varphi'(a_1) = \varphi'(a_2) = \varphi'(1)$.

Donc il existe $b_1 \in]0,a_1[$, $b_2 \in]0,a_2[$, $b_3 \in]a_2,1[$ tels que $\boxed{\begin{array}{c}\varphi''(b_1) = \varphi''(b_2) = \varphi''(b_3) = 0 \\ \text{et on a : } b_1 < b_2 < b_3.\end{array}}$

c) φ'' est continue sur $[b_1, b_2]$ et sur $[b_2, b_3]$, dérivable sur $]b_1, b_2[$ et $]b_2, b_3[$ et $\varphi''(b_1) = \varphi''(b_2) = \varphi''(b_3) = 0$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]b_1, b_2[$ et $c_2 \in]b_2, b_3[$ tels que

$\boxed{\begin{array}{c}\varphi'''(c_1) = \varphi'''(c_2) = 0 \\ \text{et on a } c_1 < c_2.\end{array}}$

d) • φ''' est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ et $\varphi'''(c_1) = \varphi'''(c_2)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]c_1, c_2[$ tel que $\varphi^{(4)}(d) = 0$.

• Ainsi $d \in]0,1[$ et $f^{(4)}(d) - A\, h^{(4)}(d) = 0$

Donc $\quad f^{(4)}(d) - \dfrac{f(x)}{h(x)} \cdot 24 = 0$

D'où $\quad f(x) = \dfrac{f^{(4)}(d)}{24}\, h(x).$

Donc $\quad \boxed{f(x) = \dfrac{f^{(4)}(d)}{24}\, x^2(1-x)^2.}$

Problème 1 : (D'après Centrale MP 2021)

Partie I.

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

- Pour $n=0$, $\deg T_0 = 0$
- Pour $n=1$, $\deg T_1 = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$.

Alors $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ et $\deg(T_n) = n$.

Donc $\deg(2XT_{n+1}) \neq \deg(T_n)$.

D'où $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n+2$.

- Ainsi, par récurrence double :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(T_n) = n.}$$

2- Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Pour $n=0$, $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0.\theta)$
- Pour $n=1$, $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1.\theta)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$. Alors :

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) \\
&= 2\cos\theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos\theta(\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta) - \cos(n\theta) \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos(n\theta) - 2\cos\theta\sin\theta\sin(n\theta) \\
&= \cos(2\theta)\cos(n\theta) - \sin(2\theta)\sin(n\theta)
\end{aligned}$$

$T_{n+2}(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta)$.

- Donc, par récurrence double :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).}$$

3- Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in [-1,1]$. Posons $\theta = \operatorname{Arccos} x$.

On a : $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leq 1$.

De plus $|T_n(1)| = |T_n(\cos 0)| = |\cos(n.0)| = 1$

Donc $\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$

Ainsi $$\boxed{\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}$$

4- • Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Pour $n=0$, $|\sin 0\theta| = 0 \leq n|\sin\theta|$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$.

Alors :

$$\begin{aligned}
|\sin(n+1)\theta| &= |\sin(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(n\theta)| \\
&\leq |\sin n\theta||\cos\theta| + |\sin\theta||\cos(n\theta)| \\
&\leq n|\sin\theta|.1 + |\sin\theta|.1 \\
&\leq (n+1)|\sin\theta|
\end{aligned}$$

- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$

• Soient $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

Donc $-\sin\theta . T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$

D'où $|\sin\theta|\,|T_n'(\cos\theta)| = n|\sin n\theta| \leq n^2|\sin\theta|$

Donc, si $\sin\theta \neq 0$, $|T_n'(\cos\theta)| \leq n^2$

- Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\theta = \operatorname{Arccos} x$.

On a $\sin\theta = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} \neq 0$

Donc $|T_n'(x)| \leq n^2$.

De plus T_n' est continue en -1 et 1 donc :

$$\forall x \in [-1,1], \quad |T_n'(x)| \leq n^2.$$

- On a : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta \cdot T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$

Or $\sin\theta \underset{0}{\sim} \theta$ et $\sin(n\theta) \underset{0}{\sim} n\theta$

Donc $\theta\, T_n'(\cos\theta) \underset{0}{\sim} n^2\theta$

Ainsi $T_n'(\cos\theta) \underset{0}{\sim} n^2$

Donc $\lim\limits_{\theta\to 0} T_n'(\cos\theta) = n^2$

Ainsi, comme T_n' est continue, $T_n'(1) = n^2$

D'où $|T_n'(1)| = n^2$

- Ainsi $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = n^2$.

Donc : $\boxed{\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2.}$

Partie II.

5- - Il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $A = \lambda \prod\limits_{j=1}^{2n} (X - \alpha_j)$.

Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. On a :

$$A = (X-\alpha_k)\lambda \prod_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} (X-\alpha_j)$$

Donc
$$A' = \lambda \prod_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} (X-\alpha_j) + (X-\alpha_k)\lambda \Big(\prod_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} (X-\alpha_j)\Big)'$$

D'où
$$A'(\alpha_k) = \lambda \prod_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} (\alpha_k - \alpha_j)$$

- Soit $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$.

Posons
$$Q = B(X) - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}.$$

On a $\dfrac{A(X)}{X-\alpha_k} = \lambda \prod\limits_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} (X-\alpha_j) \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$

Donc $Q \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$.

De plus
$$Q = B(X) - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \prod_{j\in[\![1,2n]\!]\setminus\{k\}} \frac{(X-\alpha_j)}{(\alpha_k-\alpha_j)}$$

Donc, soit $m \in [\![1, 2n]\!]$,
$$Q(\alpha_m) = B(\alpha_m) - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\,\delta_{m,k}$$
$$= B(\alpha_m) - B(\alpha_m) = 0$$

Donc Q admet au moins $2n$ racines et comme $\deg Q \leq 2n$,

on a : $Q \equiv 0$.

Donc $\boxed{B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}}$.

6- $P_\lambda(1) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$. Donc 1 est racine de P_λ.

Ainsi $\boxed{X-1 \mid P_\lambda}$.

7- Q_λ est continue, donc :

$$Q_\lambda(1) = \lim_{x\to 1} Q_\lambda(x) = \lim_{x \to 1} \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x-1}$$

Ainsi $Q_\lambda(1)$ est la dérivée en 1 de $x \mapsto P(\lambda x)$.

Ainsi $\boxed{Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$.

8- . Soit $z \in \mathbb{C}$,

$R(z) = 0 \iff z^{2n} = -1$

$\iff z^{2n} = e^{i\pi}$

$\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^{2n} = 1$

$\iff \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n}}} \in \mathbb{U}_{2n}$

$\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$

$R(z) = 0 \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], z = \underbrace{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}}_{=\omega_k}$ 7

Donc R est un polynôme de degré $2n$, de coefficient dominant 1, qui admet $2n$ racines distinctes : ω_k, $k \in [\![1, 2n]\!]$.

Donc $\boxed{R = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)}$.

9- . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, comme $Q_\lambda \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$, et comme R est scindé à racines simples :

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X-\omega_k) R'(\omega_k)}$$

. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$, on a :

. $Q_\lambda(\omega_k) = \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}$

. $\frac{R(X)}{X-\omega_k} = \frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k}$

. $R'(X) = 2n X^{2n-1}$ donc $R'(\omega_k) = 2n\, \omega_k^{2n-1}$

$= 2n \frac{e^{i(\pi + 2k\pi)}}{\omega_k}$

$= -\frac{2n}{\omega_k}$.

Donc $\boxed{Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k} \omega_k}$.

- En évaluant en 1,

$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_l)-P(\lambda)}{\omega_l - 1}\,\frac{2}{1-\omega_l}\,\omega_l$$

Donc $\boxed{\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{2n} P(\lambda\omega_l)\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{l=1}^{2n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2}}$

10- • $X^{2n} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ donc en appliquant 2 à X^{2n}, on a :

$$\lambda \cdot 2n \cdot \lambda^{2n-1} = \frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{2n}(\lambda\omega_l)^{2n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{l=1}^{2n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2}$$

Or $\omega_l^{2n} = e^{i(\pi+2l\pi)} = -1$, donc :

$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{2n}\lambda^{2n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{l=1}^{2n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2}$$

$$= -\frac{\lambda^{2n}}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2}$$

Donc, pour $\lambda = 1$, $2n = -\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2}$

D'où $\sum_{l=1}^{n}\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} = -2n^2$

- Ainsi : $\boxed{\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{2n} P(\lambda\omega_l)\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} + nP(\lambda).}$

11- Comme $f \in S_n$, il existe $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = a_0 + \sum_{l=1}^{n}(a_l\cos(l\theta) + b_l\sin(l\theta))$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{l=1}^{n} a_l\left(\frac{e^{il\theta}+e^{-il\theta}}{2}\right) + b_l\left(\frac{e^{il\theta}-e^{-il\theta}}{2i}\right)$$

Donc $e^{in\theta}f(\theta) = a_0 e^{in\theta} + \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{a_l}{2}+\frac{b_l}{2i}\right)e^{i(l+n)\theta} + \left(\frac{a_l}{2}-\frac{b_l}{2i}\right)e^{i(n-l)\theta}$

Posons $U = a_0X^n + \sum_{l=1}^{n}\left(\left(\frac{a_l}{2}+\frac{b_l}{2i}\right)X^{l+n} + \left(\frac{a_l}{2}-\frac{b_l}{2i}\right)X^{n-l}\right)$

Soit $l \in [\![1, n]\!]$, comme $l+n \in [\![n+1, 2n]\!]$ et $n-l \in [\![0, n-1]\!]$, on a $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$

et $e^{in\theta}f(\theta) = U(e^{i\theta})$

Donc $\boxed{f(\theta) = e^{-in\theta}U(e^{i\theta})}$.

12- • Soit $l \in [\![1, 2n]\!]$,

$$\frac{2\omega_l}{(1-\omega_l)^2} = \frac{2e^{i\theta_l}}{(1-e^{i\theta_l})^2} = \frac{2e^{i\theta_l}}{\left(e^{i\frac{\theta_l}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta_l}{2}} - e^{i\frac{\theta_l}{2}}\right)\right)^2}$$

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2\cancel{e^{i\varphi_k}}}{\cancel{e^{i\varphi_k}}\left(-2i\sin\frac{\varphi_k}{2}\right)^2}$$

Donc $\boxed{\dfrac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\dfrac{1}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)}}$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(\theta) = -in\, e^{-in\theta} U(e^{i\theta}) + e^{-in\theta}\, i e^{i\theta} U'(e^{i\theta})$$

$$= -in\, f(\theta) + i\, e^{-in\theta} e^{i\theta} U'(e^{i\theta})$$

Or, comme $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, d'après 10, appliqué à $\lambda = e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} U'(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U(e^{i\theta}\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + n\, U(e^{i\theta})$$

Donc $f'(\theta) = -in\, f(\theta)$

$$+ i e^{-in\theta}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U(e^{i(\theta+\varphi_k)})\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + n\, U(e^{i\theta})\right)$$

$$= -\cancel{in f(\theta)} + \cancel{in\, e^{-in\theta} U(e^{i\theta})} + \frac{i\, e^{-in\theta}}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(\theta+\varphi_k)\, e^{in(\theta+\varphi_k)}\, \frac{-1}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)}$$

$$f'(\theta) = \frac{i}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(\theta+\varphi_k)\, e^{in\varphi_k}\, \frac{-1}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)}$$

Or, soit $k \in [\![1, 2n]\!]$, $e^{in\varphi_k} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = i.(-1)^k$

Donc $\boxed{f'(\theta) = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} f(\theta+\varphi_k)\frac{(-1)^k}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)}}$

13 - • Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|f'(\theta)| \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} |f(\theta+\varphi_k)| \cdot \frac{1}{2\left|\sin\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)\right|^2}$$

$$\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_k}{2}\right)} = -\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = 2n^2$ d'après 10.

Donc $|f'(\theta)| \leq \dfrac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{2n}\cdot 2n^2$

d'où $\boxed{|f'(\theta)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$

- Comme $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |f'(\theta)|$, on a :

$$\boxed{\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$