$\boxed{\text{CORRECTION DS 7}}$

Exercice 1 :

1) $$e^{\cos x}\cdot\sqrt{1-x} \underset{0}{=} e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-x^3}{6}+o(x^3)\right)$$

$$\underset{0}{=} e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)$$

$$\underset{0}{=} e\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)$$

$$\boxed{e^{\cos x}\sqrt{1-x} \underset{0}{=} e\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3\right)+o(x^3)}$$

2) $$\sin(x^3)\ln(1+x^2)(e^x-1-x)$$

$$\underset{0}{=} \left(x^3+o(x^5)\right)\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$\underset{0}{=} x^3\cdot x^2\cdot\frac{x^2}{2}\left(1+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{x^7}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{x^7}{2}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$\boxed{\sin(x^3)\ln(1+x^2)(e^x-1-x) \underset{0}{=} \frac{x^7}{2}+\frac{x^8}{6}-\frac{5}{24}x^9+o(x^9)}$$

3) • $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$

• $$e^{\sin x}-e^x \underset{0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}-e^x$$

$$\underset{0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3 - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} \cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{6}}+\cancel{\frac{1}{2}x^2}+\cancel{\frac{1}{6}x^3} - \cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Donc $e^{\sin x}-e^x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$.

• $$x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x \underset{0}{=} x\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$

$$\underset{0}{=} x\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2\right) - x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\underset{0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}-\frac{x^4}{36}\right)-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\underset{0}{=} \left(\frac{1}{72}-\frac{1}{36}-\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{1}{45}x^5+o(x^5)$$

Donc $x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x \underset{0}{\sim} -\frac{x^5}{45}$

D'où : $\dfrac{(e^{\sin x}-e^{x})\sin^2 x}{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{6}\cdot x^2}{-\frac{x^5}{45}} = \dfrac{45}{6} = \dfrac{15}{2}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{\sin x}-e^{x})\sin^2 x}{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x} = \dfrac{15}{2}}$

4) $\ln(1-2x+2x^2) \underset{0}{=} (-2x+2x^2) - \frac{1}{2}(-2x+2x^2)^2 + \frac{1}{3}(-2x+2x^2)^3 + o(x^3)$

$\underset{0}{=} -2x+2x^2 - \frac{1}{2}(4x^2-8x^3) - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

$\underset{0}{=} -2x + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 4x^3 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

$\underset{0}{=} -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

Donc $\ln(1-2x+2x^2) - (-2x) \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}x^3$

Ainsi $\boxed{\text{la tangente a pour équation } y=-2x \text{ et la courbe est au dessus de la tangente au voisinage de } 0^+ \text{ et en dessous au voisinage de } 0^-.}$

5-a) • f est continue sur $\mathbb{R}^+$

• f est dérivable et : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \ln(1+x) + 1 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[f(0), \lim\limits_{+\infty} f[= [0,+\infty[$

Donc $\boxed{f \text{ est bijective.}}$

b) On a : $f(0)=0$ donc $\boxed{f^{-1}(0)=0}$.

c) • $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ et $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\neq 0$ donc $f^{-1}\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$.

Donc, d'après la formule de Taylor-Young $f^{-1}\in DL_2(0)$.

• Ainsi, il existe $a, b, c\in\mathbb{R}$ tels que :

$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a + bx + cx^2 + o(x^2)$.

Or $a = f^{-1}(0) = 0$.

• $f(x) \underset{0}{=} (x+1)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)$

$\underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc $f(f^{-1}(x)) \underset{0}{=} bx + cx^2 + \frac{1}{2}(bx+cx^2)^2 + o(x^2)$

D'où $x \underset{0}{=} bx + \left(c + \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)$

Donc, par unicité du développement limité :

$b=1$, $c + \frac{b^2}{2} = 0$ d'où $c = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{f^{-1}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$

Problème 1 :

1- . $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ et $f' \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$

Donc f et f' admettent des développements limités au voisinage de 0 à tout ordre.

. Comme f est impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f à l'ordre $2n+1$ est de la forme :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + o(x^{2n+1})}$$

. Comme f est impaire, f' est paire donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f' à l'ordre $2n$ est de la forme

$$\boxed{f'(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} + o(x^{2n})}$$

2-a) En primitivant le développement limité de f', on a :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Or $f(0) = 0$, donc, par unicité du développement limité : $\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k = \dfrac{b_k}{2k+1}$

Donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ b_k = (2k+1) a_k.}$

b) On a : $a_0 = f'(0)$

Or : $\forall x \in]-1,1[, \ f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{Arcsin}(x) \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

Donc $f'(0) = 1$

Ainsi : $\boxed{a_0 = 1}$

3- Soit $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1 + x \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

Donc $(1-x^2) f'(x) = 1 + x \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + x f(x)$

D'où $\boxed{(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1.}$

Donc f est solution de : $\boxed{(1-x^2) y' - x y = 1.}$

4- $(1-x^2) f'(x) - x f(x)$

$$\underset{0}{=} (1-x^2)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} + o(x^{2n})\right) - x\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2k+1} + o(x^{2n-1})\right)$$

$$\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{2(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2(k+1)} + o(x^{2n})$$

$$\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} x^{2k} - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x^{2k} + o(x^{2n})$$

Donc : $\boxed{\begin{aligned}&(1-x^2)f'(x) - xf(x)\\ &\underset{0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1} - a_{k-1})x^{2k} + o(x^{2n})\end{aligned}}$

5) On a : $1 \underset{0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1} - a_{k-1})x^{2k} + o(x^{2n})$

Donc, par unicité du développement limité :

$b_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_k - b_{k-1} - a_{k-1} = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$b_{k+1} - b_k - a_k = 0$$

D'où $(2k+3)a_{k+1} - (2k+1)a_k - a_k = 0$

Donc $\boxed{a_{k+1} = \frac{2k+2}{2k+3}a_k.}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+3}$$

Donc, par produit télescopique :

$$\frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+2}{2k+3}$$

D'où, comme $a_0 = 1$, $a_n \underset{j=k+1}{=} \prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1}$

Donc : $a_n = \prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1}\cdot\frac{2j}{2j}$

$$= \frac{\left(\prod_{j=1}^{n}2j\right)^2}{\prod_{k=2}^{2n+1}k} = \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'où : $\boxed{a_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$

Problème 2 :

1-a) $t_{i,j}$ échange les valeurs i et j.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

- si $k \notin \{i,j\}$ $t_{i,j} \circ t_{i,j}(k) = t_{i,j}(k) = k$
- si $k = i$ $t_{i,j} \circ t_{i,j}(k) = t_{i,j}(j) = i = k$
- si $k = j$ $t_{i,j} \circ t_{i,j}(k) = t_{i,j}(i) = j = k$

Dans tous les cas : $t_{i,j}(k) = k$. Donc :

$$\boxed{t_{i,j} \circ t_{i,j} = Id_{[\![1,n]\!]}}$$

c) Comme $t_{i,j} \circ t_{i,j} = Id_{[\![1,n]\!]}$ alors $t_{i,j}$ est bijective

et $t_{i,j}^{-1} = t_{i,j}$.

Ainsi $\boxed{t_{i,j} \in S_n}$.

2- Soit $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_{\sigma(i)} \iff x = \sum_{\substack{j=\sigma(i) \\ j=1}}^{n} \mu_{\sigma^{-1}(j)} e_j$$

$$\iff \forall j \in [\![1, n]\!], \mu_{\sigma^{-1}(j)} = \lambda_j$$

$$\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i = \lambda_{\sigma^{-1}(i)}$$

Donc : $\forall x \in E, \exists ! (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_{\sigma(i)}$.

Donc : $\boxed{(e_{\sigma(i)})_{i \in [\![1, n]\!]} \text{ est une base de } E.}$

3- • Soit $\sigma \in S_n$, soit $x \in \{0_E\}$, on a $x = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot e_i$

Donc $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_{\sigma(i)} = 0_E \in \{0_E\}$

Donc $\boxed{\{0_E\} \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}.}$

• Soit $\sigma \in S_n$, soit $x \in E$, par définition $f_\sigma(x) \in E$.

Donc $\boxed{E \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}.}$

4- Soit $(x, y) \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) = \lambda e_1 + \mu e_2 \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = y \end{cases}$$

Donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \text{ et } (x, y) \text{ a pour coordonnées dans } \mathcal{B} : (x-y, y).}$

5) Soit $\sigma \in S_2$ $\sigma(1) \in [\![1, 2]\!]$ donc $\sigma(1) = 1$ ou 2.

• si $\sigma(1) = 1$, comme σ bijective $\sigma(2) = 2$

• si $\sigma(1) = 2$, comme σ bijective $\sigma(2) = 1$.

Posons $\sigma_1 : [\![1, 2]\!] \to [\![1, 2]\!]$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ et $\sigma_2 : [\![1, 2]\!] \to [\![1, 2]\!]$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$.

Il est clair que $\sigma_1, \sigma_2 \in S_2$.

Ainsi $\boxed{S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}}$.

6- Soit $x \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u = (2\lambda, \lambda)$

Donc $x = (2\lambda - \lambda) e_1 + \lambda e_2 = \lambda e_1 + \lambda e_2$.

Soit $\sigma \in S_2$.

• Si $\sigma = \sigma_1$, $f_\sigma(x) = x \in F$

• Si $\sigma = \sigma_2$, $f_\sigma(x) = \lambda e_2 + \lambda e_1 = x \in F$

Donc, dans tous les cas : $f_\sigma(x) \in F$.

Donc $\boxed{F \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}.}$

7- Soit $X \in G$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $X = (0, y) = -y e_1 + y e_2$

Soit $\sigma \in S_2$

• Si $\sigma = \sigma_1$, $f_\sigma(X) = X \in G$

- Si $\sigma = \sigma_2$, $f_\sigma(X) = -y e_2 + y e_1 = -X \in G$

Dans tous les cas $f_\sigma(X) \in G$.

Donc $\boxed{G \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}}$

8) On a $(1,0) \in H$ et $(1,0) = e_1$

Donc $f_{\sigma_2}(1,0) = e_2 = (1,1) \notin H$

Donc $\boxed{H \text{ n'est pas stable par permutations de } \mathcal{B}.}$

9) • $\mathcal{B}$ est de degrés échelonnés donc $\mathcal{B}$ est libre.

• $\operatorname{Card} \mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$

Ainsi $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$

10-a) $F = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ 2a + b = 0\}$

$= \{aX^2 - 2aX + c,\ a, c \in \mathbb{R}\}$

$= \operatorname{Vect}(X^2 - 2X, 1)$

Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

et $(X^2 - 2X, 1)$ est une famille génératrice de F.

Comme $X^2 - 2X$ et 1 ne sont pas colinéaires, $(X^2 - 2X, 1)$ est libre, donc :

$\boxed{(X^2 - 2X, 1) \text{ est une base de } F}$

b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$P = \lambda_1 (X^2 - 2X) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 X$

$\iff aX^2 + bX + c = \lambda_1 X^2 - 2\lambda_1 X + \lambda_2 + \lambda_3 X$

$\iff \begin{cases} a = \lambda_1 \\ b = \lambda_3 - 2\lambda_1 \\ c = \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_3 = b + 2a \\ \lambda_2 = c \end{cases}$

Donc : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ P = \lambda_1 (X^2 - 2X) + \lambda_2 + \lambda_3 X$

Donc : $\boxed{\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G}$

11-a) $P_0' = 2X - 2$ donc $P_0'(1) = 0$

Ainsi $\boxed{P_0 \in F.}$

b) $P_0 = X^2 - 2X + 1 = X^2 + 1 - 2(X+1) + 2$

Posons $e_1 = 1$, $e_2 = X+1$, $e_3 = X^2 + 1$, on a alors :

$P_0 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$

Ainsi $f_\sigma(P_0) = 2e_{\sigma(1)} - 2e_{\sigma(2)} + e_{\sigma(3)}$

$= 2e_2 - 2e_3 + e_1$

$= 2(X+1) - 2(X^2+1) + 1$

D'où $\boxed{f_\sigma(P_0) = -2X^2 + 2X + 1}$

c) $f_\sigma(P_0)' = -4X+2$ donc $f_\sigma(P_0)'(1) = -2$

Ainsi $\boxed{f_\sigma(P_0) \notin F}$

Donc $\boxed{F \text{ n'est pas stable par permutations de } \mathcal{B}.}$

12- a) Soit $i \in [\![2, n]\!]$

On a : $e_1 - e_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{1, i\} \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k = i \end{cases}$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

Ainsi $\boxed{e_1 - e_i \in G}$

b) • Soient $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (e_1 - e_i) = 0_E$

Alors : $\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right) e_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc : $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 0$ et :

$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$

Donc $(e_1 - e_i)_{i \in [\![2, n]\!]}$ est libre.

• Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in G$. On a : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

Donc $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i$.

Donc $x = \lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i$

$= -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i$

$= -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (e_1 - e_i)$

Donc $(e_1 - e_i)_{i \in [\![2, n]\!]}$ est génératrice de G.

• Donc $\boxed{(e_1 - e_i)_{i \in [\![2, n]\!]} \text{ est une base de } G.}$

c) • (u) est une famille génératrice de F et $u \neq 0_E$ donc (u) est libre. Ainsi (u) est une base de F

donc $\boxed{\dim F = 1.}$

• $\dim G = \operatorname{Card} (e_1 - e_i)_{i \in [\![2, n]\!]}$.

Donc $\boxed{\dim G = n - 1.}$

13- • Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda u = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i$.

Or $x \in G$, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda = 0$, ainsi $n\lambda = 0$

donc $\lambda = 0$, d'où $x = 0_E$.

Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

• Comme $\dim F + \dim G = n = \dim E$, on a :

$\boxed{F \oplus G = E.}$

14-a) Soit $\sigma \in S_n$, soit $x \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$x = \lambda u = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i$

Donc $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_{\sigma(i)} \underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda e_j = x \in F$

Donc $\boxed{F \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}}$.

b) Soit $\sigma \in S_n$, soit $x \in G$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

Donc $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\sigma(i)} \underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(j)} e_j$

Or $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(j)} \underset{i=\sigma^{-1}(j)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

Donc $f_\sigma(x) \in G$.

Ainsi $\boxed{G \text{ est stable par permutations de } \mathcal{B}}$.

15-a) On a $V \subset F$ donc $\dim V \leq \dim F = 1$

. si $\dim V = 0$ alors $V = \{0_E\}$

. si $\dim V = 1$ on a $V \subset F$ et $\dim V = \dim F$

donc $V = F$

D'où : $\boxed{V = \{0_E\} \text{ ou } V = F}$.

b-i) Comme $V \not\subset F$, il existe $x_0 \in V$ tel que $x_0 \notin F$.

Or il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

car $\mathcal{B}$ est une base de E.

Si $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_i = \lambda_1$ alors $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 e_i$

$= \lambda_1 u \in F$

ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe } i_0 \in [\![2, n]\!] \text{ tel que } \lambda_{i_0} \neq \lambda_1 \\ \text{et on a } x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V. \end{array}}$

ii) Soit $\sigma \in S_n$. Comme V est stable par permutations de $\mathcal{B}$,

$f_\sigma(x_0) \in V$. De plus $x_0 \in V$ et V est un espace

vectoriel donc : $\boxed{f_\sigma(x_0) - x_0 \in V}$

iii) Posons $\sigma = t_{1, i_0}$.

$f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\sigma(i)} = \lambda_1 e_{i_0} + \lambda_{i_0} e_1 + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{1, i_0\}} \lambda_i e_i$

et $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{1, i_0\}} \lambda_i e_i$

Donc $f_\sigma(x_0) - x_0 = \lambda_1 e_{i_0} + \lambda_{i_0} e_1 - \lambda_1 e_1 - \lambda_{i_0} e_{i_0}$

$= \lambda_1 (e_{i_0} - e_1) + \lambda_{i_0} (e_1 - e_{i_0})$

$= (\lambda_{i_0} - \lambda_1)(e_1 - e_{i_0})$

Or $\lambda_{i_0} - \lambda_1 \neq 0$ donc $\frac{1}{\lambda_{i_0} - \lambda_1}(f_\sigma(x_0) - x_0) \in V$

D'où $\boxed{e_1 - e_{i_0} \in V}$

iv) Soit $i \in [\![2, n]\!]$

- Si $i = i_0$, $e_1 - e_i \in V$
- Si $i \neq i_0$, comme V est stable par permutations de $\mathcal{B}$, en posant $\sigma = t_{i, i_0}$, on a $f_\sigma(e_1 - e_{i_0}) \subset V$

Or $f_\sigma(e_1 - e_{i_0}) = e_{\sigma(1)} - e_{\sigma(i_0)} = e_1 - e_i$

D'où $e_1 - e_i \in V$

Donc : $\boxed{\forall i \in [\![2, n]\!], \quad e_1 - e_i \in V.}$

v) . V est un sous-espace vectoriel de E donc :

$$\mathrm{Vect}\left((e_1 - e_i)_{i \in [\![2, n]\!]} \right) \subset V$$

Ainsi $\boxed{G \subset V}$

- Donc $n - 1 = \dim G \leq \dim V$ donc $\dim V = n - 1$ ou n.
  - si $\dim V = n$, alors $V = E$
  - si $\dim V = n - 1 = \dim G$, alors, comme $G \subset V$, $V = G$

Donc $\boxed{V = G \text{ ou } V = E.}$

16) . D'après 15, si V est stable par permutations de $\mathcal{B}$ alors $V = \{0_E\}$ ou F ou G ou E.

- D'après 3 et 14, $\{0_E\}$, F, G et E sont stables par permutations de $\mathcal{B}$.
- Donc les sous-espaces stables par permutations de $\mathcal{B}$ sont : $\boxed{\{0_E\}, \ F, G \text{ et } E.}$

17) Posons $e_1 = 1$, $e_2 = X + 1$, $e_3 = X^2 + 1$.

On a $u = e_1 + e_2 + e_3 = X^2 + X + 3$

donc $F = \mathrm{Vect}(X^2 + X + 3)$

et $e_1 - e_2 = -X$, $e_1 - e_3 = -X^2$

donc $G = \mathrm{Vect}(-X, -X^2) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Donc les sous-espaces de E stables par permutations de $\mathcal{B}$ sont : $\boxed{\{0\}, \ \mathrm{Vect}(X^2 + X + 3), \ \mathrm{Vect}(X, X^2), \ \mathbb{R}_2[X].}$