CORRECTION DS 8

Exercice 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+n} \underset{j=k-n}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{j+n}{j+2n}$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{j}{n}+1}{\frac{j}{n}+2}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+n} = \int_0^1 \frac{x+1}{x+2}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \left[x - \ln(x+2)\right]_0^1$$

D'où $\boxed{\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+n} = 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k e^{k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f : x \mapsto xe^x$ est continue sur $[0,1]$.

Donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 xe^x\,dx$

$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \quad \text{par intégration par parties}$$

$$= e - \left[e^x\right]_0^1$$

D'où : $\boxed{\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k e^{\frac{k}{n}} = 1}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k+n) - \ln(n)}{\sqrt{k+n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k+n) - \ln(n)}{\sqrt{k+n}} = 0}$.

Exercice 2 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $[x, 2x]$

Ainsi : $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2-a) Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = F(2x) - F(x)$.

Or F est dérivable, donc :

$\boxed{f \text{ est dérivable}}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

$$= 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $x < 2x$ donc $e^{-x} > e^{-2x}$

Ainsi $f'(x) < 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt + [\ln t]_x^{2x}$$

$$= \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \ln(2)$$

Or $\dfrac{e^{-t}-1}{t} = \dfrac{1-t-1+o(t)}{t} \underset{0^+}{=} -1 + o(1)$

Donc, par primitivation : $F(t) \underset{0^+}{=} F(0) - t + o(t)$ où F est une primitive de $t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$

D'où $f(x) \underset{0^+}{=} (F(0) - 2x) - (F(0) - x) + o(x) + \ln(2)$

$$\underset{0^+}{=} -x + \ln(2) + o(x)$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln(2)}$.

4) Soit $x \geqslant 1$.

$$|f(x)| = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{2x} = -e^{-2x} + e^{-x}$$

Or $\lim_{x \to +\infty} (-e^{-2x} + e^{-x}) = 0$.

D'où : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Problème 1 : (D'après CCINP - PC - 2023).

1-a-i) Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = (4(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y'), \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y')$$

$$= \lambda(4x - 2y, x+y) + \mu(4x' - 2y', x'+y')$$

$$= \lambda f(x,y) + \mu f(x',y')$$

Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

ii). Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x,y) \in \ker f \iff f(x,y) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$

Donc $\boxed{\ker f = \{0\}}$.

- Donc f est injective et comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, f est bijective.

Donc : $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$.

iii) f est injective et surjective donc $\boxed{f \in GL(\mathbb{R}^2)}$.

b- $f(v) = f(1,0) = (4,1)$

Donc v et $f(v)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi $(v, f(v))$ est libre. De plus Card $(v, f(v)) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Donc $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc $\boxed{f \text{ est cyclique}}$.

c-i) • Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x,y) \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \iff f(x,y) = 2(x,y)$

$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \iff x = y$

Donc $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1,1)$.

Comme $e_1 \neq (0,0)$, $\boxed{(e_1) \text{ est une base de } \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})}$

• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x,y) \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \iff f(x,y) = 3(x,y)$

$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases} \iff x = 2y$

Donc $\ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (2,1)$

Comme $e_2 \neq (0,0)$, $\boxed{(e_2) \text{ est une base de } \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})}$

ii) • Soit $(x,y) \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$

On a $f(x,y) = 2(x,y) = 3(x,y)$ donc $(x,y) = (0,0)$.

Ainsi $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \}(0,0)\}$

• Comme $\dim \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) + \dim \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$
$= 2 = \dim \mathbb{R}^2$,

on a : $\boxed{\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2}$

iii) Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

On $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = 3e_2$.

Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

d) Posons $\omega = e_1$. On a $\omega \neq (0,0)$ et $f(\omega) = 2e_1 = 2\omega$

Donc $(\omega, f(\omega))$ est liée.

Ainsi $\boxed{(\omega, f(\omega)) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^2.}$

2-a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$,

$g^2(x,y,z) = g(-y+z, -x-z, x-y)$

$= (-(-x-z) + x - y, \; -(-y+z) - (x-y), \; -y+z-(-x-z))$

$= (2x + z - y, \; 2y - z - x, \; 2z - y + x)$

$= 2(x,y,z) + (-y+z, -x-z, x-y)$

$= 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(x,y,z) + g(x,y,z)$.

Donc : $\boxed{g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}}$

b) • Soit $(x,y,z) \in \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

On a : $g(x,y,z) = -(x,y,z) = 2(x,y,z)$

Donc $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Ainsi $\boxed{\ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \}(0,0,0)\}}$

- On a : $g^2 - g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0$

Donc $(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \underbrace{(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}_{=0}$

Donc, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(g(x,y,z) - 2(x,y,z))$$
$$= (g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(g(x,y,z) + (x,y,z)) = (0,0,0)$$

Ainsi $g(x,y,z) - 2(x,y,z) \in \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

et $g(x,y,z) + (x,y,z) \in \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

Or $(x,y,z) = -\frac{1}{3}(g(x,y,z) - 2(x,y,z)) + \frac{1}{3}(g(x,y,z) + (x,y,z))$
$$\in \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) + \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

Donc : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$.

c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$

et $\forall e \in \mathcal{B}_1,\ g(e) = -e$ et $\forall e \in \mathcal{B}_2,\ g(e) = 2e$

Donc $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$.

d) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, $g^2(v) = g(v) + 2v$ donc $(v, g(v), g^2(v))$ est liée, ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique}}$.

3-a) - Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - (\lambda P(X) + \mu Q(X))$$
$$= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X))$$
$$= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).$$

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P(X) \leq n$ et $\deg P(X+1) \leq n$

Donc $\deg \Delta(P) \leq n$, ainsi $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

D'où $\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

b) $\Delta(X^\ell) = (X+1)^\ell - X^\ell$
$$= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} X^j - X^\ell$$

Donc $\boxed{\Delta(X^\ell) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j} X^j}$

c) Comme P non constant, $\deg P \geq 1$. Pour $P = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell X^\ell$ avec $p = \deg P$. Par linéarité :

$$\Delta(P) = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \Delta(X^\ell).$$

Or $\deg \Delta(X^\ell) = \ell - 1$ car $\binom{\ell}{\ell-1} \neq 0$.

Donc, comme $a_p \neq 0$, $\deg \Delta(P) = \deg(\Delta(X^p))$
$$= p - 1$$

D'où $\boxed{\deg \Delta(P) = \deg P - 1}$

d) En réitérant, si $\deg P \geq k$, alors $\deg \Delta^k(P) = \deg(P) - k$

Donc $\deg \Delta^k(X^n) = n - k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Donc $(\Delta^k(X^n))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\boxed{\Delta \text{ est cyclique.}}$

4-a) • Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrons que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(e_k) = \lambda_k^p e_k$.

- Pour $p = 1$, $h^p(e_k) = h(e_k) = \lambda_k e_k = \lambda_k^p e_k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $h^p(e_k) = \lambda_k^p e_k$.

  On a : $h^{p+1}(e_k) = \lambda_k^p h(e_k) = \lambda_k^p \lambda_k e_k = \lambda_k^{p+1} e_k$.
- Donc, par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(e_k) = \lambda_k^p e_k$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, par linéarité :

$$h^p(v) = \alpha_1 h^p(e_1) + \cdots + \alpha_n h^p(e_n)$$

Donc $\boxed{h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p e_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p e_n}$

b) Soient $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{p=0}^{n-1} \beta_p h^p(v) = 0$

On a : $\sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k^p e_k = 0$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \lambda_k^p \right) e_k = 0$

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_k \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \lambda_k^p = 0$$

Or : $\forall k \in [\![1, n]\!], \alpha_k \neq 0$.

Donc : $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \lambda_k^p = 0$

Posons $P = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p X^p$. On a $\deg P \leq n-1$.

De plus $\forall k \in [\![1, n]\!], P(\lambda_k) = 0$.

Donc P admet au moins n racines distinctes.

Ainsi $P = 0$. Donc : $\forall p \in [\![0, n-1]\!], \beta_p = 0$.

Donc $\boxed{(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)) \text{ est libre.}}$

c) $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ est libre et

Card $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)) = n = \dim E$.

Donc $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ est une base de E.

Ainsi : $\boxed{E \text{ est cyclique.}}$

Problème 2 : (D'après E3A - MP - 2023)

1) F est une primitive de f donc F est dérivable et $F' = f$.

Or f est continue. Donc :

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) = f(x)}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on effectue le changement de variable $u = xt$. On a : $du = x\,dt$. Donc :

$$\Psi(f)(x) = \int_0^x f(u)\frac{du}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du.$$

Donc : $\boxed{\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}F(x)}$

3) • $\Psi(f)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• F est dérivable en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0)$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \Psi(f)(x) = f(0)$

Or : $\Psi(f)(0) = \int_0^1 f(0)\,dt = f(0)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \Psi(f)(x) = \Psi(f)(0)$ ainsi $\Psi(f)$ est continue en 0

• Donc $\boxed{\Psi(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+) \text{ et } \Psi(f)(0) = f(0).}$

4) • D'après 3, si $f \in E$, $\Psi(f) \in E$.

• Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$

$$\Psi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^1 (\lambda f + \mu g)(xt)\,dt$$
$$= \lambda \int_0^1 f(xt)\,dt + \mu \int_0^1 g(xt)\,dt$$
$$= \lambda \Psi(f)(x) + \mu \Psi(g)(x)$$

Donc $\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Psi(f) + \mu \Psi(g)$

• D'où : $\boxed{\Psi \in \mathcal{L}(E)}$.

5-a) • h est clairement continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est bornée et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$, ainsi $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$

Donc h est continue en 0.

• Ainsi : $\boxed{h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)}$

b) • h est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Soit $x > 0$, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$

Or $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Donc h n'est pas dérivable en 0.

• Ainsi $\boxed{h \text{ n'est pas } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$.

c) $g \in \operatorname{Im}\Psi$, donc il existe $f \in E$ telle que $g = \Psi(f)$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $xg(x) = x\Psi(f)(x) = F(x)$

De plus, pour $x = 0$, $xg(x) = 0 = F(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x\,g(x) = F(x)$.

Or $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$. Donc $\boxed{x \mapsto x g(x) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

d) Supposons $h \in \operatorname{Im}\Psi$, alors $x \mapsto x h(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, la dérivée de $x \mapsto x h(x)$ est :

$$2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

qui n'a pas de limite en 0 donc $x \mapsto x h(x)$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\boxed{h \notin \operatorname{Im}\Psi.}$

e) $h \in E$ et $h \notin \operatorname{Im}\Psi$, ainsi $\operatorname{Im}\Psi \neq E$

Donc $\boxed{\Psi \text{ n'est pas surjectif.}}$

6- Soit $f \in \ker\Psi$. On a : $\Psi(f) = 0$.

Donc : $\forall x > 0,\ \frac{1}{x}F(x) = 0$.

Ainsi : $\forall x > 0,\ F(x) = 0$

Donc en dérivant : $\forall x > 0,\ f(x) = 0$

Or f est continue donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc $\ker\Psi = \{0\}$ et $\boxed{\Psi \text{ est injective.}}$

7-a-i) On a : $\forall x > 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x^j \ln(x) = 0$

et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i 0^i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j 0 = 0$

Donc : $\forall x > 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x^{j-1} \ln(x) = 0$

Or, si $j > 1$, $\lim_{x \to 0} x^{j-1}\ln(x) = 0$ par croissances comparées.

Donc, $\lim_{x \to 0} \sum_{j=2}^{m} \beta_j x^{j-1} \ln(x) = 0$, de plus $\lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{i-1} = \alpha_1$

et $\lim_{x \to 0} \beta_1 \ln(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_1 = 0 \\ \pm\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc, $\boxed{\alpha_1 = \beta_1 = 0.}$

ii) On a : $\sum_{i=p+1}^{m} \alpha_i f_i + \sum_{j=p+1}^{m} \beta_j g_j = 0$.

Soit $x > 0$, $\sum_{i=p+1}^{m} \alpha_i x^i + \sum_{j=p+1}^{m} \beta_j x^j \ln(x) = 0$

Donc $\sum_{i=p+1}^{m} \alpha_i x^{i-(p+1)} + \sum_{j=p+1}^{m} \beta_j x^{j-(p+1)} \ln(x) = 0$

Or $\lim_{x \to 0} \sum_{i=p+1}^{m} \alpha_i x^{i-(p+1)} = \alpha_{p+1}$

et, par croissances comparées $\lim_{x \to 0} \sum_{j=p+1}^{m} \beta_j x^{j-(p+1)} \ln(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_{p+1} = 0 \\ \pm\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc $\boxed{\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0}$

iii) • Ainsi, par récurrence finie :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \alpha_p = \beta_p = 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre.

• Comme $\mathcal{B}$ est génératrice de F_n,

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F_n.}$

• Ainsi $\dim F_n = \operatorname{Card} \mathcal{B}$ donc $\boxed{\dim F_n = 2n}$

b-i) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\Psi(f_p)(x) = \int_0^1 (xt)^p\, dt = x^p \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{x^p}{p+1}$

Donc $\boxed{\Psi(f_p) = \frac{f_p}{p+1}.}$

ii) - Par intégration par parties :

$$\int_a^x t^p \ln(t)\, dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\ln(t)\right]_a^x - \int_a^x \frac{t^{p+1}}{p+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt$$

$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x) - \frac{a^{p+1}}{p+1}\ln(a) - \frac{1}{p+1}\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_a^x$$

Donc $\boxed{\int_a^x t^p \ln(t)\, dt = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x) - \frac{a^{p+1}}{p+1}\ln(a) - \frac{x^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)^2}}$

• g_p est continue sur $\mathbb{R}^+$, soit G_p une primitive de g_p.

Alors G_p est continue sur $\mathbb{R}^+$.

On a : $\int_a^x t^p \ln(t)\, dt = G_p(x) - G_p(a)$

Donc $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^x t^p \ln(t)\, dt = G_p(x) - G_p(0)$

$$= \int_0^x g_p(t)\, dt$$

Or $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^x t^p \ln(t)\, dt = \frac{x^{p+1}\ln(x)}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$

Donc : $\boxed{\int_0^x g_p(t)\, dt = \frac{x^{p+1}\ln(x)}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.}$

• $\Psi(g_p)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g_p(t)\, dt = \frac{x^p \ln(x)}{p+1} - \frac{x^p}{(p+1)^2}.$

De plus $\Psi(g_p)(0) = g_p(0) = 0$

Donc $\boxed{\Psi(g_p) = \frac{1}{p+1} g_p - \frac{1}{(p+1)^2} f_p.}$

iii) Soit $f \in F_n$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p f_p + \sum_{p=1}^{n} \beta_p g_p$$

Donc $\Psi(f) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p \Psi(f_p) + \sum_{p=1}^{n} \beta_p \Psi(g_p)$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha_p}{p+1} f_p + \sum_{p=1}^{n} \beta_p \left(\frac{1}{p+1} g_p - \frac{1}{(p+1)^2} f_p\right)$$

$\in F_n.$

Donc $\boxed{\Psi_{F_n} \in \mathcal{L}(F_n).}$

c) On a $\ker \Psi = \{0\}$ donc $\ker \Psi_n = \{0\}$

Ainsi Ψ_n est injective.

Or $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n)$ et F_n est de dimension finie.

Donc $\boxed{\Psi_n \in GL(F_n).}$