# Devoir à la maison n° 1 :



**A rendre pour le : lundi 18 septembre**

**Les résultats doivent être encadrés.**

**Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.**

**Problème 1 :**

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln\left(1+x^2\right). \end{array}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$.

**Partie I : Étude de $f$ et tracé de $\mathcal{C}$**

1. (a) Montrer que $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'$.
   (b) En déduire le sens de variation de $f$.
   (c) Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''$.
2. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = x\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
   (b) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) = 0.$$
5. Tracer $\mathcal{C}$.
6. (a) On considère la fonction $g$ définie par :
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x^2)\ln\left(1+x^2\right) - x^2. \end{array}$$
   Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'$.
   (b) En déduire la valeur de :
$$\int_0^1 x\, f(x)\, dx.$$

**Partie II : Étude d'une suite associée à $f$**

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0.$$
3. Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
4. (a) Établir :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2.$$
   (b) En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leq 2\left(u_n - u_{n+1}\right).$$

**Exercice 1 :**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Q}.$$

La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2 :**
Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose que $b | a^2 + 1$. Montrer que :

$$b | a^4 + 1 \Leftrightarrow b | 2.$$

**Exercice 3 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $d = \text{pgcd}(2n+3, n)$.

1. Montrer que $d = 1$ ou $d = 3$.
2. Déterminer les valeurs de $n$ telles que $d = 3$.
3. Déterminer les valeurs de $n$ telles que $d = 1$.