

**A rendre pour le : lundi 26 février****Les fonctions doivent être commentées.****L'indentation doit être représentée par un trait vertical.****La copie doit être manuscrite.**

## Rendu de monnaie

L'objectif de ce problème est de rendre une somme  $s$  en utilisant les pièces et les billets d'un système monétaire  $E$ .

1. On appelle système monétaire une liste de valeurs de pièces ou billets constituée de nombres entiers dont le dernier terme est 1, triée par ordre strictement décroissant. Par exemple, le système monétaire européen est représenté par la liste : [500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1].

Ecrire une fonction `EstSysteme` qui prend comme argument une liste d'entiers  $E$  (on ne vérifiera pas qu'il s'agit d'une liste d'entiers) et qui renvoie `True` si la liste est un système monétaire et `False` sinon.

On considère une somme  $s$  que l'on doit rendre en utilisant un système monétaire  $E$ , c'est-à-dire, on cherche une liste  $l$  dont les éléments sont dans  $E$  et ont pour somme  $s$ . Les éléments de la liste  $l$  peuvent être dans un ordre quelconque et peuvent apparaître plusieurs fois. Par exemple, pour rendre la somme 27 avec le système monétaire européen, on peut utiliser les listes [20, 5, 2] ou [10, 10, 5, 1, 1] ou [5, 5, 5, 5, 5, 2] ou ...

On cherche une méthode permettant de rendre le moins de pièces ou billets possible, c'est-à-dire qui minimise la taille de la liste renvoyée.

2. La méthode utilisée dans cette question consiste à choisir le plus grande valeur du système monétaire  $E[i]$  telle que  $E[i] \leq s$ , puis d'ajouter  $E[i]$  dans la liste  $l$  et de répéter avec la somme  $s - E[i]$ .
  - (a) Ecrire une fonction `PremierIndice` qui prend comme argument un système monétaire  $E$  et une somme  $s$  et qui renvoie le premier indice  $i$  tel que  $E[i] \leq s$ .
  - (b) Ecrire une fonction itérative `GloutonIt` qui prend comme argument un système monétaire  $E$  et une somme  $s$  et qui renvoie la liste  $l$  répondant au problème, obtenue par la méthode proposée.
  - (c) Ecrire une fonction récursive `GloutonRec` qui prend comme argument un système monétaire  $E$  et une somme  $s$  et qui renvoie la liste  $l$  répondant au problème, obtenue par la méthode proposée.
3. Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre minimal de pièces ou billets utilisés dans un système monétaire  $E$  pour rendre une somme  $s$ . On considèrera le système  $E$  fixé et on note  $m[s]$  le nombre minimal de pièces ou billets à donner pour rendre la somme  $s$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on cherche à écrire une fonction qui renvoie la liste de taille  $N + 1$  :

$$m = [m[s], s \in [0, N]].$$

- (a) On a :  $m[0] = 0$  et :

$$\forall s \in [1, N], m[s] = 1 + \min_{i_s \leq j < \text{len}(E)} m[s - E[j]],$$

où  $i_s$  est le premier indice tel que  $E[i_s] \leq s$ .

Expliquer en quelques phrases cette formule.

- (b) Ecrire une fonction `Min` qui prend comme argument un système monétaire  $E$  et un entier  $N$  et qui renvoie la liste  $m$  recherchée.