PCSI 1 **Devoir à la maison n° 2 :** 2023/2024

**A rendre pour le : lundi 9 octobre**

**Les résultats doivent être encadrés.**

**Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.**

**Exercice 1 :**

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, n+1]\!], \frac{1}{k}\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}.$$
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**Exercice 2 :**

1. Montrer que la fonction $f$ suivante est croissante :
$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x}. \end{array}$$
2. Montrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

**Problème 1 :**

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On considère la fonction :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,n] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left|\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right|. \end{array}$$

On **admettra** que la fonction $\varphi$ admet un maximum.

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Montrer que :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \varphi(k) = 0.$$
2. Montrer que :
$$\forall t \in [0,n], \varphi(t) = \prod_{k=0}^{n} |t-k|.$$
3. On considère la fonction :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln|x|. \end{array}$$
   Montrer que $f$ est dérivable et que :
$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

Partie 2 : Etude du maximum de $\varphi$

1. Montrer que :
$$\forall t \in [0,n], \varphi(n-t) = \varphi(t).$$
2. Soit $t \in ]1,n]$ tel que $t \notin \mathbb{N}$. Calculer $\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}$.
3. En déduire que :
$$\forall t \in \left[1, \frac{n}{2}\right], \varphi(t-1) \geq \varphi(t).$$

.

4. Montrer que $\varphi$ atteint son maximum en un point de l'intervalle $\left[0, \frac{n}{2}\right]$.
On **admettra** que, $\varphi$ atteint son maximum en un point de $[0,1]$.

Partie 3 : Abscisse du maximum de $\varphi$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \notin \mathbb{N}$, expliciter $\ln(\varphi(t))$.
   En déduire $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$.
2. Pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, déterminer le signe de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k}$.
   En déduire que $\varphi'(t)$ est strictement négatif sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
3. (a) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$.
   (b) Déterminer le sens de variation de $g$.
   (c) En déduire que $\varphi'$ s'annule en au plus un point de $]0,1[$.
4. Montrer que le maximum de $\varphi$ est atteint en un unique point de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, noté $t_n$.
   Quelle est la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n-k}$ ?

Partie 4 : Une majoration de $\varphi$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\frac{1}{k-t_n} > \frac{1}{k}.$$
   (b) Montrer que :
$$\frac{1}{t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
2. (a) Montrer que :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt.$$
   (b) Montrer que :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
3. Montrer que $t_n < \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que :
$$\forall t \in [0,n], \varphi(t) < \frac{n!}{\ln(n+1)}.$$