PCSI 1 | 2023/2024

Devoir à la maison n° 3 :

A rendre pour le : lundi 6 novembre

Le problème 3 peut être rendu jusqu'au lundi 13 novembre.

Les résultats doivent être encadrés.

Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.

Problème 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_p) : \ pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k.$$

1. Donner une solution évidente de (E_p).
2. (a) Expliciter et résoudre l'équation (E_1).
   (b) Expliciter et résoudre l'équation (E_2).
   (c) Expliciter et résoudre l'équation (E_3).
3. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que toute solution de (E_p) est de module inférieur ou égal à 1.
4. On suppose dans cette question que (E_p) admet une solution de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $e^{i\theta} \neq 1$.
   (a) Montrer que :
   $$pe^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
   (b) En déduire une contradiction.
5. Que peut-on conclure sur le module des solutions de (E_p) ?

Problème 2 :

On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \exp\left(\frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}\right)}{\ln|2\cos x|}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera D.
2. Etudier la parité et la périodicité de f.
3. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $D \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et expliquer comment, à partir de l'étude sur $D \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on obtient toute la courbe représentative de f.
4. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1-\sin(2x)} = |\sin x - \cos x| \text{ et } \sqrt{1+\sin(2x)} = |\sin x + \cos x|.$$
5. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ pour $x \in D \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On pourra distinguer deux cas.
6. On pose $E =]0,1[\cup]1,2[$ et :
   $$h : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(4-t)}{\ln t} \end{array}.$$
   (a) Déterminer le tableau de variation de h.
   (b) Ecrire $f\big|_{D\cap]\pi/4,\pi/2[}$ comme composée de fonctions usuelles et de la fonction h.
   (c) En déduire les variations de $f\big|_{D\cap]\pi/4,\pi/2[}$.
7. Tracer la courbe représentative de f.

Problème 3 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}\, x).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont définies sur un même domaine D que l'on précisera.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fontion de $\cos(\theta)$.
   (b) Soit $x \in D$, calculer $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$. (On donnera une expression polynomiale.)
3. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in D, \mathrm{Arccos}\,(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}\,(x).$$
   (b) Etudier la parité de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D, f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x).$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et calculer $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, (1-x^2) f_n''(x) - x f_n'(x) + n^2 f_n(x) = 0.$$
6. (a) Montrer que :
   $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{\mathrm{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}.$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est dérivable en 1 et calculer $f_n'(1)$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$, en déduire que f_n est dérivable en -1 et calculer $f_n'(-1)$.