Indications détaillées
DM3

Problème 1 :

1.
2. (a)
   (b) Il s'agit d'une équation du second degré.
   (c) Il s'agit d'une équation du troisième degré. Factoriser par $z-1$ (ce qui est possible d'après 1.) pour se ramener à du second degré.
3. Utiliser l'inégalité triangulaire pour majorer le module de la somme, et remarquer que si $|z|>1$, alors, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $|z|^p > |z|^k$ pour en déduire une contradiction.
4. (a) Utiliser la formule pour les sommes géométriques puis une factorisation par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur.
   (b) Remarquer que $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\frac{p\theta}{2}$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$ puis passer au sinus. On doit obtenir $p=1$.
5. Ne pas oublier la solution évidente.

Problème 2 :

1. Résoudre $2\cos x = 0$, $|2\cos x| = 1$, $\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} = 0$. On doit se ramener à $\mathbb{R}$ privé de la réunion de trois ensembles.
2. Calculer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$.
3. Périodicité puis parité.
4. Remplacer 1 par $\cos^2(x)+\sin^2(x)$ dans les deux expression et utiliser une formule de trigonométrie pour faire apparaître une identité remarquable.
5. Faire les cas où $x \leq \frac{\pi}{4}$ et où $x > \frac{\pi}{4}$ pour enlever les valeurs absolues. Un des deux cas conduit à une constante.
6. (a) En dérivant h, se ramener à l'étude du signe de $g : t \mapsto t\ln t + (4-t)\ln(4-t)$. Dériver g pour obtenir les variations de g puis son signe. En déduire le signe de h'.
   (b) Remarquer que $\ln(2\sin x) = \frac{1}{2}\ln(4\sin^2 x)$ et $\ln(2\cos x) = \frac{1}{2}\ln(4\cos^2 x)$. Utiliser de la trigonométrie pour faire apparaître h. Les fonctions usuelles devant apparaître sont exp et $4\cos^2$.
   (c) Composer les variations des fonctions obtenues dans la question précédente.
7. Il y a plusieurs "morceaux".

Problème 3 :

1.
2. (a) Pour $\cos(2\theta)$ utiliser une formule de trigonométrie et pour $\cos(3\theta)$, on peut utiliser la formule de Moivre.
   (b) Utiliser la question précédente en remplaçant θ par $\operatorname{Arccos} x$ et utiliser $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
3. (a) Calculer le cos de chacun des deux membres, pour montrer qu'ils sont égaux puis utiliser un bon intervalle pour "enlever" le cos.
   (b) Calculer $f_n(-x)$ en utiliser la question précédente.
4. Partir du membre de gauche et utiliser les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
5. (a) Le résultat n'est pas très beau mais...
   (b) ... il doit se simplifier.
6. (a) Utiliser la formule $\cos(2a) = 1-2\sin^2 a$ et $x \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
   (b) Composer la limite précédente avec $\operatorname{Arccos} x$.
   (c) Remarquer que $\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \dfrac{\cos(n\operatorname{Arccos} x)-1}{(n\operatorname{Arccos} x)^2}.\dfrac{(n\operatorname{Arccos} x)^2}{x-1}$ pour se ramener aux questions précédentes.
   (d) Ce n'est pas la peine de recalculer la limite du taux d'accroissement, on peut utiliser la parité.