Devoir à la maison n° 5 :

A rendre pour le : lundi 11 décembre

Les résultats doivent être encadrés.

Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.

Problème 1 :

Dans ce problème, on cherche à déterminer les applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

P_1 : $\forall x, y \in]0,+\infty[, f(xf(y)) = yf(x)$,

P_2 : f est majorée sur $]1,+\infty[$, c'est-à-dire : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]1,+\infty[, f(x) \leq A$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit φ une application définie sur I et à valeurs dans I. On dit que φ est une involution ssi :

$$\forall x \in I, \varphi(\varphi(x)) = x.$$

   (a) Donner un exemple d'involution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ autre que l'identité.
   (b) Donner un exemple d'involution de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ autre que l'identité.
   (c) Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

2. Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant les propriétés P_1 et P_2.
   (a) Soient $y_1, y_2 \in]0,+\infty[$ tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.
   (b) Montrer que f est injective.
   (c) Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.
   (d) Montrer que f est une involution de $]0,+\infty[$.
   (e) Soient $a, b \in]0,+\infty[$, montrer que :

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

   Indication : on pourra poser $y = f(b)$.

3. Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant les propriétés P_1 et P_2.
   On note F l'ensemble des points fixes de f :

$$F = \{x \in]0,+\infty[, f(x) = x\}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, xf(x) \in F.$$

   (b) Montrer que $1 \in F$.
   (c) Montrer que si $x, y \in F$, alors $xy \in F$ et $\frac{x}{y} \in F$.
   (d) Montrer que si $x \in F$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^n \in F.$$

   (e) Montrer que si $x \in F$, alors $x \leq 1$.
   Indication : on pourra considérer la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) Montrer que $F = \{1\}$.
   (g) En déduire f.

4. Déterminer toutes les applications répondant au problème posé.

T.S.V.P.

Problème 2 :
On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{2x+3} \end{array}$$

1. (a) Déterminer les points fixes de f.
   (b) Etudier les variations de f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{2u_n+3}.$$
   (a) Etudier la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le \sqrt{2} - u_n \le \frac{2-u_n^2}{2}.$$
3. (a) Montrer qu'il existe des suites d'entiers naturels non nuls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a_n}{b_n},$$
   avec :
$$a_0 = b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ll} a_{n+1} & = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} & = 2a_n + 3b_n \end{array} \right.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont impairs.
   (c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ge 5^n \text{ et } b_n \ge 5^n.$$
   (d) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2b_n^2 - a_n^2 = 1.$$
   (e) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \le \frac{1}{2b_n^2}.$$
   (f) Etudier la limite de la suite $(\cos(\sqrt{2}b_n\pi))$.
4. On considère l'ensemble suivant :
$$A = \{\cos x + \cos(\sqrt{2}x),\ x \in \mathbb{R}\}.$$
   Déterminer la borne inférieure de A.