Indications
DM5

Problème 1 :

1. (a) Montrer que $x \mapsto -x$ convient.
   (b) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ convient.
   (c) Que peut-on dire de $\varphi \circ \varphi$?
2. (a) Appliquer P_1 à 1 et y_1 puis à 1 et y_2.
   (b) Ne pas oublier que f est à valeurs dans $]0, +\infty[$.
   (c) Appliquer P_1 à 1 et 1 puis utiliser l'injectivité.
   (d) Appliquer P_1 à 1 et x.
   (e) Appliquer P_1 à a et $f(b)$ et utiliser l'involution pour simplifier.
3. (a) Appliquer P_1 à x et x.
   (b) Utiliser 2.c.
   (c) Utiliser 2.e appliquée à x et y puis à $\frac{x}{y}$ et y.
   (d) Par récurrence.
   (e) Raisonner par l'absurde en montrant que (x^n) est majorée (avec P_2) et que $\lim x_n = +\infty$.
   (f) Double inclusion en appliquant la question précédente à x et à $\frac{1}{x}$.
   (g) Utiliser 3.a.
4. L'analyse a été faite dans les questions précédentes. Il faut faire la synthèse.

Problème 2 :

1. (a) Résoudre $f(x) = x$.
   (b) Calcul de la dérivée.
2. (a) Par récurrence avec la monotonie de f.
   (b) Remarquer que $[0, \sqrt{2}]$ est stable par f pour en déduire que (u_n) est majorée. La limite vérifie $f(l) = l$.
   (c) $0 \leq \sqrt{2} - u_n$ est déjà prouvé. Remarquer que $\frac{2-u_n^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2}$ et utiliser la croissance de (u_n) pour obtenir une minoration.
3. (a) Par récurrence.
   (b) Par récurrence en utilisant, sans les redémontrer, les résultats sur les sommes et les produits de nombres pairs et impairs.
   (c) Par récurrence.
   (d) Par récurrence.
   (e) En remplaçant dans 2.c et en simplifiant.
   (f) Encadrer $\sqrt{2}b_n\pi - a_n\pi$ et passer au cosinus (avec un argument de monotonie). Conclure avec le théorème d'encadrement.
4. Montrer que -2 est un minorant de A.
   Considérer m un minorant de A et appliquer l'inégalité à $x = b_n\pi$ puis faire un passage à la limite pour montrer que $-2 \geq m$.