PCSI 1

Devoir à la maison n° 6 :

2023/2024

A rendre pour le : lundi 22 janvier

Les résultats doivent être encadrés.

Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.

Problème 1 :

Partie A :

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que $A = PD_AP^{-1}$ où :
$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que : $B = PD_BP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
6. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E?

Partie B :

On souhaite dans cette partie, étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. A l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Problème 2 :

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation fonctionnelle d'inconnue $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in]0,+\infty[,\ f(x.y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que $f(1) = 0$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x, y \in]0,+\infty[,\ f(y) - f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$
2. Soit f **continue en 1** vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = nf(x).$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ f(x^{1/q}) = \frac{f(x)}{q}.$$
   (d) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(x^r) = rf(x).$$
   (e) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e^x) = xf(e).$$
   (f) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = a\ln(x).$$
3. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $(*)$ continues en 1.

Dans les questions suivantes, on n'utilisera pas les résultats des questions 2. et 3.

4. Soit f **dérivable en 1** vérifiant $(*)$.
   Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.$$
5. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $(*)$ dérivables en 1.