Indications
DM6

Problème 1 :

Partie A :

1. Calcul avec le pivot de Gauss.
2. Calculer PD_AP^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}BP$
4. Remarquer que $M(x,y) = xA + yB$.
5. Remarquer que $M(x,y)$ est inversible ssi $D(x,y)$ est inversible et utiliser le critère d'inversibilité des matrices diagonales.
6. Calculer B^2 et A^2.

Partie B :

1.
2. On trouve $C = M(1,3)$.
3. Par récurrence.
4. Calculer C^n avec la formule : $C^n = PD(1,3)^nP^{-1}$. Ne pas oublier d'exclure le cas $n = 0$.

Problème 2 :

1. (a) Appliquer $(*)$ à 1 et 1.
   (b) Appliquer $(*)$ à $\frac{y}{x}$ et x.
2. (a) Montrer que f est continue en $a \in]0,+\infty[$: appliquer 1.b à a et x puis faire tendre x vers a pour montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
   (b) Par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ puis utiliser 1.b pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$.
   (c) Appliquer la question précédente en remarquant que $x = (x^{1/q})^q$.
   (d) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(x^r) = rf(x).$$
   Remarquer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(e^r) = rf(e)$ puis écrire $x \in \mathbb{R}$ comme limite d'une suite de rationnels.
   (e) Appliquer la question précédente à $\ln x$.
3. Analyse-synthèse.
4. Montrer que f est dérivable en $x \in]0,+\infty[$ en étudiant la limite du taux d'accroissement $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ quand y tend vers x, en en simplifiant le taux d'accroissement avec 1.b.
5. Analyse-synthèse.