Devoir à la maison n° 7 :

A rendre pour le : lundi 26 février

Les résultats doivent être encadrés.

Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Dans cette partie, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $a_1, \dots, a_n$ des réels **deux à deux distincts**.
   On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
   $$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$
   Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés les **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $x_1, \dots, x_n$.
   Si i et $k \in \mathbb{N}$, le symbole de Kronecker est noté $\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$
   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i.
   (b) Montrer que :
   $$\forall i, k \in [\![1, n]\!],\ L_i(a_k) = \delta_{i,k}$$
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, monter qu'il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.
   Déterminer la valeur de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = x_k$.
   (e) On pose $\Phi = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
   i. Montrer que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \Phi'(a_i) \neq 0.$$
   ii. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit Q le polynôme défini à la question 1.d.
   Montrer que :
   $$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$
2. Si f est une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\displaystyle\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.
3. Pour une fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on notera $||f||_\infty = \displaystyle\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

   Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

   On se donne $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.
   On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(a_i) = f(a_i)$$
   (on a prouvé l'existence et l'unicité dans la partie précédente).
   On note $\Phi = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.
   (a) Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda\Phi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on **fixe** $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
   i. Montrer qu'il est possible de choisir λ tel que $\varphi(t) = 0$. On fixe ainsi λ dans la suite de cette question.
   ii. Montrer que φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$. En déduire que φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.
   iii. En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$. On note a un réel de $[-1, 1]$ où $\varphi^{(n)}$ s'annule.
   iv. En déduire que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\Phi(t)$.
   (b) Déduire de la question précédente que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |\Phi(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.