Devoir à la maison n° 8 :

A rendre pour le : lundi 18 mars

Les résultats doivent être encadrés.

Merci de préciser sur la copie si vous souhaitez être noté ou non.

Problème 1 :

1. Montrer que : $\text{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
2. (a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-1)^n \sin x - \frac{1}{x}. \end{array}$$
Montrer que f_n est bijective de $\left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle que l'on précisera.
   (b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $|x \sin x| = 1$ admet une unique solution dans $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On notera x_n cette solution.
3. Montrer que : $x_n \sim n\pi$.
4. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = x_n - n\pi.$$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \text{Arcsin}\, \frac{1}{x_n}$.
   (b) En déduire que : $y_n \sim \frac{1}{n\pi}$. (On indiquera clairement le raisonnement effectué.)
5. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = x_n - n\pi - \frac{1}{n\pi}.$$
   (a) Montrer que : $z_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n\pi} + z_n = \text{Arcsin}\, \frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n}$.
   (c) En déduire que : $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Problème 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de E est une famille **positivement génératrice** de E ssi :
$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}^+)^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k.$$

1. Des exemples :
   (a) On pose $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$ et $x_1 = (1,-1,0)$, $x_2 = (0,1,-1)$, $x_3 = (-1,0,1)$.
   Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est positivement génératrice de E_1.
   (b) On pose $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P'(0)\}$ et $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - X - 1$, $P_3 = -2X^2 + X + 1$.
   Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est positivement génératrice de E_2.
2. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille positivement génératrice de E.
   (a) Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E.
   (b) Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.
3. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p, -x_1, \dots, -x_p)$ est une famille positivement génératrice de E.
4. On suppose, dans cette question, que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille positivement génératrice de E. Montrer que :
$$p \geq n+1.$$
   (b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que la famille $\left(e_1, \dots, e_n, -\sum_{i=1}^{n} e_i\right)$ est une famille positivement génératrice de E.
   (c) En déduire le nombre minimal d'éléments d'une famille positivement génératrice de E.