Indications
DM8

Problème 1 :

1. Primitiver un développement limité.
2. (a) Etudier la continuité et la stricte monotonie de f_n en faisant une disjonction de cas selon la parité de n.
   (b) Remarquer, en faisant une disjonction de cas selon la parité de n que $|x \sin x| = 1 \Leftrightarrow f_n(x) = 0$.
3. Utiliser la définition d'un équivalent et le théorème d'encadrement.
4. (a) Calculer $\sin(y_n)$ et écrire le domaine de y_n.
   (b) Faire une composition à droite d'équivalents.
5. (a) Réécrire l'équivalent précédent avec un o.
   (b)
   (c) Remplacer z_n par $o(\frac{1}{n})$ dans la question précédente et composer les développements limités.

Problème 2 :

1. (a) Soit $(x, y, z) \in E_1$, résoudre le système $(x, y, z) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On exprimera, par exemple, λ_1 et λ_2 en fonction de x,y, z et λ_3.
   Choisir $\lambda_3 \geq 0$ (qui dépend de x, y, z) tel que $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$.
   (b) De même qu'à la question précédente, en remarquant que si $P \in E_2$, alors P estd e la forme : $aX^2 + bX + b$.
2. (a)
   (b) Prendre $x \neq 0_E$ et décomposer x et $-x$ dans la famille positivement génératrice.
   Sommer les décompositions obtenues pour obtenir une décomposition de 0_E.
   Montrer, en raisonnant par l'absurde, que les coefficients de la décomposition de 0_E ne sont pas tous nuls.
3. Remarquer que $\lambda_k = \frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2} - \frac{|\lambda_k| - \lambda_k}{2}$ et que $\frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2} \geq 0$, $\frac{|\lambda_k| - \lambda_k}{2} \geq 0$.
4. (a) Utiliser 2.a pour montrer que $p \geq n$ puis raisonner par l'absurde en utilisant 2.b pour montrer que $p \neq n$.
   (b) Utiliser le coefficient : $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \geq 0$ pour le dernier vecteur.
   (c) Utiliser 4.a et 4.b.