PCSI 1

Indications
DM9

2023/2024

Problème 1 :

Partie A : Etude d'endomorphismes de polynômes

1. Ne pas oublier de montrer que Ψ_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Calcul en distinguant $k=0$ des autres cas.
   (b) Utiliser l'image d'une base.
   (c) La calcul se fait en distinguant le cas $k=0$ mais il peut être réintégré dans la conclusion.
3. (a) Calcul.
   (b) Calculer $\Phi_a(\Psi_a(P))(x)$ (attention à la position des parenthèses) en distinguant le cas $x=a$.
   (c) Remarquer que $\Phi_a \circ \Psi_a = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$ et utiliser 2.b.

Partie B : Etude d'une fonction définie par une intégrale

1. (a) h est une primitive.
   (b) Utiliser le théorème des bornes atteintes.
   (c) Utiliser le théorème d'encadrement et un argument de continuité (au bon endroit).
   (d) Raisonner de même sur $[x,0]$.
2. Il n'y a pas de problème sur $\mathbb{R}^*$ et les questions précédentes donnent la continuité en 0.
3. (a) Faire un changement de variable.
   (b) Utiliser la positivité de l'intégrale en traitant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
4. (a) Utiliser la définition de la limite et un découpage d'intégrale. On peut s'inspirer le la preuve du théorème de Césaro.
   (b) Appliquer la question précédente à $f - l$.
   (c) Poser $g : x \mapsto f(-x)$ et appliquer la question précédente à g.

Partie C :

1. Utiliser la partie B et remarquer que : $\frac{h(x)^2}{x^3} = x.\frac{h(x)^2}{x^4}$.
2. Faire une intégration par parties en dérivant h^2 et en primitivant $x \mapsto \frac{1}{x^4}$.
3. Faire un passage à la limite : $\alpha \to 0$. Pour justifier les limites, écrire les intégrales en utilisant des primitives et utiliser un argument de continuité.