Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1 :

Samedi 23 septembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la proposition P suivante :

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1.$$

1. Ecrire la contraposée de P.
2. Montrer que la contraposée de P est vraie. Que peut-on en déduire pour P ?
3. Etudier la réciproque de P.

Exercice 2 :
Soit m un nombre premier, montrer que :

$$\exists!(a, b) \in \mathbb{N}^2, 4m = a^2 - b^2.$$

Exercice 3 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le plus grand diviseur impair de n.

1. Calculer u_n pour $n \in [\![1, 5]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer u_{2n+1}.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = u_n.$$
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} = n^2.$$

Exercice 4 :

1. Montrer que :
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 7 | 2^{4^n} - 2.$$

Exercice 5 :
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ m = f(n).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1) = n+1$.
3. Conclure. On précisera bien les raisonnements utilisés.

Problème 1 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

1. On considère la fonction :
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x} - e^x - x. \end{array}$$
   (a) Montrer que g est dérivable et déterminer une fonction h telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (e^x - 1)h(x).$$
   (b) Etudier les variations de g.
   (c) Etudier le signe de g.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $a = 0$?
4. Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq g(a).$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a + ng(a).$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 :
On considère la fonction :
$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - \ln x. \end{array}$$

1. On considère la fonction :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1. \end{array}$$
   (a) Etudier les variations de φ.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
   (c) Etudier le signe de φ.
2. (a) Etudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de f.
   (c) Montrer que f admet un minimum égal $\alpha + \frac{1}{\alpha}$.
3. (a) Soit n un entier tel que $n > 3$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
   On note x_n cette solution.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est croissante.
   (c) Montrer que, pour tout entier $p > 3$, $f(\ln(p)) \leq p$.
   (d) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.