# Devoir surveillé n° 2 :



**Samedi 14 octobre**

**3 h**

**Les résultats doivent être encadrés.**
**Les calculatrices sont interdites.**
**Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.**

**Exercice 1 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} 2^j 3^{k-j}.$$

**Exercice 2 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right).$$

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$.

**Exercice 3 :**
Soit $n \geq 2$, on pose :

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}.$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ S_p + S_{n-p-1} = 2^n.$$

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} S_p$.

**Exercice 4 :**

1. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Exprimer $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)}$ en fonction de $\cos(2y)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\right).$$

**Exercice 5 :**
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor.$$

**Exercice 6 :**

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $\cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
2. Calculer $\cos(2\alpha)$.
3. Montrer que $\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha)$.
4. En déduire la valeur de $\alpha$.
5. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ : $\cos(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Exercice 7 :**
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = (-1)^n u_n.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} u_k u_{k+2}$.

**Problème 1 :**
Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} ]-\pi,\pi[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2\cos x - 6\sin x + 8}{1+\cos x}. \end{array}$$

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :
$$\sin x - \cos x = 1.$$
   (b) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :
$$6\sin x - 2\cos x = 8.$$
2. (a) Calculer la dérivée de $f$.
   (b) Calculer les limites en $(-\pi)^+$ et en $\pi^-$ de $f$.
   (c) Étudier les variations de $f$.
   (d) Montrer que $f$ admet un minimum et calculer sa valeur.
   (e) Tracer $f$.
3. (a) Montrer que $f$ est bijective de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ vers un intervalle $I$ que l'on précisera.
   Dans toute la suite, on notera $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f : \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[ \to I$.
   (b) Calculer $f^{-1}(2)$.
   (c) Étudier la dérivabilité de $f^{-1}$.
   (d) Étudier les variations de $f^{-1}$.
4. (a) Montrons que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est bijective. On notera $\operatorname{Arctan}$ sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que $\operatorname{Arctan}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
   (c) On pose :
$$g : \begin{array}{ccc} ]-\pi,\pi[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\frac{x}{2}. \end{array}$$
      i. Montrer que $g$ est bijective et exprimer $g^{-1}$ en fonction de $\operatorname{Arctan}$.
      ii. Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
5. On pose :
$$h : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2-6x+5. \end{array}$$
   (a) Montrer que $h$ est bijective de $[1,+\infty[$ vers un intervalle $J$ que l'on précisera.
   On notera $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h : [1,+\infty[ \to J$.
   (b) Calculer $h^{-1}$.
6. (a) Soit $x \in ]-\pi,\pi[$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$. Montrer que :
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$
   (b) Montrer que : $f = h \circ g$.
   (c) En déduire $f^{-1}$ en fonction $\operatorname{Arctan}$.
   (d) Calculer, lorsqu'elle existe, la dérivée de $f^{-1}$.