PCSI 1

Devoir surveillé n° 3 :

2023/2024

Samedi 25 novembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
On considère la fonction :
$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\text{Arctan}\,\frac{1-x}{1+x}.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 2 :
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$(1+i)z^2 - z + \frac{1-i}{2} = 0.$$
On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 3 :
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = 0,\ u_1 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 4 :
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto \frac{\text{ch}\,(x) - 1}{\text{ch}\,(x) + 1} e^x.$$

Problème 1 :

On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-1}{z+1}. \end{array}$$

1. Calculer et mettre sous forme trigonométrique : $f\left(\dfrac{-3+2\sqrt{3}i}{3}\right)$.
2. Déterminer les $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$ tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.
4. (a) Soit $\omega \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$:

$$f(z) = \omega.$$

   (b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$, $f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$.
5. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$:

$$f(z) = z.$$

6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
7. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1,-i,i\}$ et on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$

   D'après la question précédente la suite (v_n) est bien définie.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.
   (b) Montrer que (v_n) est périodique de période 4 c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+4} = v_n$.
   (c) Déterminer le terme général de la suite (u_n).

Problème 2 :
Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2\ln(x). \qquad (E)$$

Partie 1 : Résultats préliminaires utiles

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. En déduire les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.
3. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$.
4. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto (1-x^2)\ln x$.

Partie 2 : Résolution de l'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle linéaire homogène (E_0) sur $]0,+\infty[$ associée à (E) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \qquad (E_0)$$

1. Déterminer $\alpha > 0$ telle que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E_0).
2. Soit $\varphi :]0,+\infty| \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
   (a) Vérifier que ψ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que φ est solution de (E_0) ssi ψ' est solution de :

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)}z = 0. \qquad (E')$$

3. Résoudre (E') sur $]0,+\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) sur $]0,+\infty[$.

Partie 3 : Résolution de l'équation complète

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

1. On suppose que l'on connaît une solution φ_0 de (E). Montrer que :

$$\mathcal{S} = \{\varphi_0 + g,\ g \in \mathcal{S}_0\}.$$

2. On cherche une solution particulière φ_0 de (E) sous la forme :

$$\varphi_0 : x \mapsto x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x),$$

   où λ et μ sont des fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \qquad (E_1)$$

   (a) Montrer que la fonction φ_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée à l'aide des fonctions λ et μ.
   (b) En déduire que la fonction φ_0 est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde à l'aide des fonctions λ', μ et μ'.
   (c) Montrer que φ_0 est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ssi :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x. \qquad (E_2)$$

   (d) Soit $x > 0$. Déterminer les expressions de $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en résolvant le système linéaire d'équations (E_1) et (E_2).
   (e) En déduire les expressions des fonctions λ et μ.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.