Devoir surveillé n° 4 :

Samedi 16 décembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Soient E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 2 :
Soient E, F et G des ensembles, soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,E)$.
On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ sont surjectives.
Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 3 :
Calculer les limites des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right\rfloor$.

Problème 1 :
Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \uparrow B = \{x \in E,\ x \notin A \text{ ou } x \notin B\}.$$

1. (a) Illustrer la définition de $A \uparrow B$.
   (b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Exprimer $A \uparrow B$ à l'aide des opérations ensemblistes usuelles.
   (c) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $A \uparrow A$, $A \uparrow E$ et $A \uparrow \emptyset$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Exprimer $A \cap B$ et $A \cup B$ en utilisant uniquement l'opération ensembliste $\uparrow$.
3. (a) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
   $$A \subset B \iff A \uparrow (B \uparrow B) = E.$$
   (b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
   $$A \uparrow B = \emptyset \iff A = B = E.$$
   (c) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
   $$A \uparrow B = A \uparrow C \iff A \cap B = A \cap C.$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On veut résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:
   $$A \uparrow X = B. \quad (*)$$
   (a) Montrer que si X est solution de $(*)$, alors $A \cup B = E$.
   (b) Montrer que si $A \cup B = E$, alors $\overline{B}$ est solution de $(*)$.
   (c) Montrer que si $A \cup B = E$, alors les solutions de $(*)$ sont les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que :
   $$\overline{B} \subset X \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$
   (d) Conclure.

Problème 2 :

Etude d'une fonction

1. Etudier sur $]0,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes et les extrema.
2. Montrer que f est une bijection de $]0,e]$ vers $]0,e^{1/e}]$. La bijection réciproque de f est-elle dérivable sur $]0,e^{1/e}]$?

Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose : $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$t_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \Phi_x(t_n).$$

Lorsque la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

3. Si $x = 1$, que peut-on en dire sur la convergence de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est à dire la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $\mathbf{x > 1}$:

5. Montrer que pour $x \in]1,+\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n < t_{n+1}$.
7. On suppose que $x \in]1, e^{\frac{1}{e}}]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \le e$. En déduire que dans ce cas, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
8. On suppose $x > e^{\frac{1}{e}}$, montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
   Indication : On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions 4 et 1, aboutir à une contradiction.

On va étudier le cas $\mathbf{x \in]0,1[}$:

9. Montrer que pour $x \in]0,1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?
10. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}$.
11. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
12. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leurs limites ne peuvent être que des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$.

Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$.
Pour cela, on pose $\forall t \in [0,1],\ g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$.

13. Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ g'(t) = (\ln x)^2 \Phi_x(t)\,(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - 1$.
14. **Dans le cas $\mathbf{x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[}$**, on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0		1
g'	$(\ln x)^2 x - 1$	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$

   (a) Préciser le signe de $g'(0)$. Quelle est la monotonie de g sur $[0,1]$?
   (b) Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0,1]$.
   (c) Conclure sur la convergence de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15. **Dans le cas $\mathbf{x} \in \left]\mathbf{0}, \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}\right[$**, on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0		α		1
g'	$(\ln x)^2 x - 1$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$

où α est l'unique racine de g'' sur $]0,1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -e^{-1}\ln(x) - 1$.

(a) Préciser le signe de β lorsque $x \in \left[e^{-e}, \dfrac{1}{e}\right[$.

(b) Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in \left[e^{-e}, \dfrac{1}{e}\right[$.

16. **On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $\mathbf{x} \in]\mathbf{0}, \mathbf{e^{-e}}[$.** Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

t	0		γ		α		δ		1
g'	$(\ln x)^2 x - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\beta > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
g	x	$\searrow$	$g(\gamma)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(\delta)$	$\searrow$	$x^x - 1$

avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que Φ_x possède un unique point fixe dans $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ que l'on note p.

(a) Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$.

(b) En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p, p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_2 \leq t_{2n}$ et que la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers p_2.

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{2n+1} \leq p$.
Indication : On raisonnera par l'absurde

(e) Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$? La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?