Devoir surveillé n° 5 :

Samedi 27 janvier

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Soit $t \in]0,1[$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2.$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2.$$

   (a) On pose : $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(tx) \end{array}$.

      i. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ g(t^k x) - g(t^{k+1}x) = t^{2k}x^2.$$

      ii. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(x) - g(t^n x) = x^2\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}.$$

      iii. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x^2}{1-t^2}.$$

   (b) i. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - f(t^n x) = x^2\frac{1-t^{2n}}{(1-t^2)^2}.$$

      ii. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(0) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2}.$$

2. Conclure.

Exercice 2 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $a < b < c$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0.$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = -\frac{a^n}{c^n}f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right) - \frac{b^n}{c^n}f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right).$$

   (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{a^N}{c^N} + \frac{b^N}{c^N} < 1$.

   (c) Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $|f^{(N)}|$ admet un maximum sur $[-A, A]$.
   On pose : $M_A = \max\limits_{[-A,A]} |f^{(N)}|$.

   (d) Montrer que :

$$\forall x \in [-A, A],\ |f^{(N)}(x)| \leq \left(\frac{a^N}{c^N} + \frac{b^N}{c^N}\right)M_A.$$

   (e) En déduire que $M_A = 0$ puis que $f^{(N)} = 0$.

   (f) En déduire la forme de f.

3. Conclure.

Exercice 3 :
Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ des fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$.
3. On suppose (u_n) monotone. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.
4. On suppose que (u_n) n'est pas monotone.
   (a) Montrer qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que :
   $$(f-g)(u_n).(f-g)(u_m) \leq 0.$$
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Problème 1 :

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ ssi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que A et B sont semblables ssi il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1}BP$.

1. **Un exemple de matrice semblable à une matrice unipotente**

   On considère les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $B = P^{-1}AP$.
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice unipotente.
2. **Étude de $\mathcal{N}$.**
   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que pour tout $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2$ et pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \in \mathcal{N}$
   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2$, on a $N_1.N_2 \in \mathcal{N}$.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
3. **Étude de $\mathcal{U}$.**
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il stable par combinaison linéaire ?
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$.
4. **Puissances généralisées.**
   Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par
   $$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$
   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.
   (a) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ U^{(n)} = U^n.$$
   (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$
   (d) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. **Retour sur l'exemple.**
Dans cette question, on utilise les matrices A et B définies dans la question 1.
   (a) Expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
   (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).
6. **Matrice semblable à son inverse.**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice semblable à $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $N = U - I$ et soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}UP$.
   (a) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est semblable à $I - N + N^2$.
   (b) Montrer que A et A^{-1} sont semblables ssi N et $N^2 - N$ sont semblables.
   (c) On suppose que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. On pose $M = N^2 - N$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{ac} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer que P et Q sont inversibles et calculer P^{-1} et Q^{-1}.
      ii. Montrer que : $P^{-1}NP = N'$ où $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
      iii. En déduire une matrice semblable à M.
      iv. Calculer $QN'Q^{-1}$.
      v. En déduire que N et M sont semblables puis que A et A^{-1} sont semblables.