PCSI 1 | **Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6 :** | 2023/2024

Samedi 2 mars

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
En utilisant des équivalents,

1. calculer la limite quand x tend vers 0 de :
$$x \mapsto \frac{\left(\ln(1-\sin(2x))\right)^3}{x(1-\cos(3x))},$$
2. calculer la limite quand x tend vers 1 de :
$$x \mapsto \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3},$$
3. calculer la limite quand x tend vers 1 de :
$$x \mapsto \left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}},$$
4. calculer la limite quand x tend vers 0 de :
$$x \mapsto \frac{\sqrt{\operatorname{ch}(2x)}-1}{\sqrt[3]{8+\operatorname{sh}(x)}-2}.$$

Exercice 2 :
Soit $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Soit $x \in [0,1]$.
L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que :
$$f(x) = \frac{f^{(4)}(d)}{24} x^2(1-x)^2.$$

1. Montrer le résultat dans les cas particuliers $x = 0$ et $x = 1$.
On suppose dans toute la suite de l'exercice que $x \in]0,1[$.
2. Soit $\begin{array}{rccc} h : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^2(1-t)^2 \end{array}$. Calculer $h^{(4)}$.
3. On pose $A = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ et $\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) - Ah(t) \end{array}$.
   (a) Montrer qu'il existe $a_1, a_2 \in]0,1[$ tels que $a_1 < a_2$ et $\varphi'(a_1) = \varphi'(a_2) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $b_1, b_2, b_3 \in]0,1[$ tels que $b_1 < b_2 < b_3$ et $\varphi''(b_1) = \varphi''(b_2) = \varphi''(b_3) = 0$.
   (c) Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in]0,1[$ tels que $c_1 < c_2$ et $\varphi'''(c_1) = \varphi'''(c_2) = 0$.
   (d) Conclure.

Problème 1 :

Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

Dans ce problème, si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n ; si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant
$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \exists (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

On remarque que les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont des fonctions bornées ; si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée de I dans $\mathbb{C}$, on note
$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n.
2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|T_n'\right\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$
On pourra commencer par établir que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin\theta|$.

Partie II : Inégalité de Bernstein

Soit n un entier naturel non nul.

5. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)\, A'(\alpha_k)} \tag{1}$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

6. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X-1$ divise P_λ.

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on note Q_λ le quotient de P_λ par $X-1$:

$$Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X-1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$$

7. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

8. Montrer que

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

9. À l'aide de la formule (1), montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k} \omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} \tag{2}$$

10. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

On pourra appliquer l'égalité (2) au polynôme X^{2n}.

Soit maintenant f dans $\mathcal{S}_n$.

11. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$.
12. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$ et déduire des questions 10 et 11 que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta + \varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} \tag{3}$$

13. En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left|f'(\theta)\right| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

puis que :

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$