PCSI 1 — 2023/2024

Devoir surveillé n° 7 :

Samedi 23 mars

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de :
$$f : x \mapsto e^{\cos x}\sqrt{1-x}.$$
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 9 de :
$$f : x \mapsto \sin(x^3)\ln(1+x^2)(e^x-1-x).$$
3. Calculer :
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sin x}-e^x)\sin^2 x}{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x}.$$
4. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0 pour la fonction :
$$f : x \mapsto \ln(1-2x+2x^2).$$
5. On pose :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & (x+1)\ln(1+x). \end{array}$$
   (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Calculer $f^{-1}(0)$.
   (c) Justifier l'existence et déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f^{-1}.

Problème 1 :

Dans tout ce problème, on considère la fonction :
$$f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

1. Démontrer l'existence de deux suites à valeurs réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et } f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).$$
2. (a) Justifier que l'on a : $\forall k\in\mathbb{N}, b_k = (2k+1)a_k$.
   (b) Déterminer la valeur de a_0.
3. Vérifier que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$(\mathrm{E}) : \left(1-x^2\right)y' - xy = 1.$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer le développement limité à l'ordre $2n$ de $x\mapsto \left(1-x^2\right)f'(x) - xf(x)$ lorsque $x\to 0$ en fonction des termes des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
5. En utilisant le fait que f est solution de (E), en déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire le terme général de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 :

Notations et définitions :

- Dans tout le problème n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.
- On appelle permutation de $[\![1,n]\!]$ toute application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ bijective.
  On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
- Sauf mention contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
- Soit $\sigma \in S_n$. Soit $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On pose $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\sigma(i)}$. On définit ainsi une application $f_\sigma : E \to E$.
- Soit V un sous-espace vectoriel de E. On dit que V est stable par permutations de $\mathcal{B}$ ssi :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall x \in V, f_\sigma(x) \in V.$$

Préliminaires :

1. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$. On pose :

$$\begin{array}{cccl} t_{i,j} & [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ & k & \mapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ i & \text{si } k = j \\ j & \text{si } k = i. \end{cases} \end{array}$$

   (a) Expliquer en une phrase l'action de $t_{i,j}$.
   (b) Montrer que $t_{i,j} \circ t_{i,j} = Id_{[\![1,n]\!]}$.
   (c) En déduire que $t_{i,j} \in S_n$.
2. Soit $\sigma \in S_n$, montrer que $(e_{\sigma(i)})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E.
3. Montrer que $\{0_E\}$ et E sont stables par permutations de $\mathcal{B}$.

Un exemple :

On pose $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (1,1)$.

4. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E et déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de tout vecteur (x, y) de E.
5. Montrer que S_2 est un ensemble réduit à deux éléments que l'on déterminera.
6. On pose $F = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (2,1)$. Montrer que F est stable par permutations de $\mathcal{B}$.
7. On pose $G = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que G est stable par permutations de $\mathcal{B}$.
8. On pose $H = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que H n'est pas stable par permutations de $\mathcal{B}$.

Un autre exemple :

On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$.

9. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X+1, X^2+1)$ est une base de E.
10. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(1) = 0\}$.
    (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.
    (b) Soit $G = \mathrm{Vect}(X)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.
11. On pose : $P_0 = X^2 - 2X + 1$.
    (a) Montrer que $P_0 \in F$.
    (b) Soit $\sigma \in S_3$ définie par : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.
    Calculer $f_\sigma(P_0)$.
    (c) Montrer que $f_\sigma(P_0) \notin F$. Que peut-on en conclure ?

Cas général :

On pose $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\}$.

12. (a) Montrer que : $\forall i \in [\![2,n]\!]\ e_1 - e_i \in G$.
    (b) Montrer que $(e_1 - e_i)_{i \in [\![2,n]\!]}$ est une base de G.
    (c) Déterminer les dimensions de F et de G.
13. Montrer que : $E = F \oplus G$.
14. (a) Montrer que F est stable par permutations de $\mathcal{B}$.
    (b) Montrer que G est stable par permutations de $\mathcal{B}$.
15. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par permutations de $\mathcal{B}$.
    (a) On suppose que $V \subset F$, montrer que $V = \{0_E\}$ ou $V = F$.

(b) On suppose que $V \not\subset F$.

i. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et qu'il existe $i_0 \in [\![2, n]\!]$ tels que $\lambda_{i_0} \neq \lambda_1$ et $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V$.

ii. Montrer que : $\forall \sigma \in S_n,\ f_\sigma(x_0) - x_0 \in V$.

iii. En déduire que : $e_1 - e_{i_0} \in V$.

iv. Montrer que : $\forall i \in [\![2, n]\!],\ e_1 - e_i \in V$.

v. En déduire que $G \subset V$ puis que $V = G$ ou $V = E$.

16. Conclure en déterminant tous les sous-espaces vectoriels de E stables par permutations de $\mathcal{B}$.

17. Application : on pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X+1, X^2+1)$. On a montré à la question 4. que $\mathcal{B}$ est une base de E. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par permutations de $\mathcal{B}$.