PCSI 1 **Devoir surveillé n° 8 :** 2023/2024

Lundi 29 avril

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{k}{k+n}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} ke^{k/n}$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k+n)-\ln(n)}{\sqrt{k+n}}$.

Exercice 2 :
On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire les variations de f.
3. Etudier la limite en 0^+ de f.
4. Etudier la limite en $+\infty$ de f.

Problème 1 :
Dans ce problème, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique ssi il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

On dit que l'endomorphisme f est diagonalisble ssi il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \, f(e_k) = \lambda_k e_k.$$

Ce problème est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

1. **Etude d'un premier exemple**
   Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

   (a) i. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
   ii. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
   iii. Montrer que $f \in GL(\mathbb{R}^2)$.
   (b) En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) i. Déterminer une base de $\ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2})$ et une base de $\ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^2})$.
   ii. Montrer que $\ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2}) \oplus \ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$.
   iii. En déduire que f est diagonalisable.
   (d) Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?
2. **Etude d'un deuxième exemple**
   Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

   $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \, g(x, y, z) = (-y + z, -x - z, x - y)$$

   (a) Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2Id_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) Montrer que $\ker(g + Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(g - 2Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.
   (c) En déduire que g est diagonalisable.
   (d) L'endomorphisme g est-il cyclique ?
3. **Etude d'un troisième exemple**
   Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

   Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$
   (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.
   (c) En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.
4. **Cas d'un endomorphisme diagonalisable**
   Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

   Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que :

   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \, h(e_k) = \lambda_k e_k.$$

   On suppose que les λ_k, $k \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux distincts :

   $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \, i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$$

   Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

   $$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

(a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p e_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p e_n$$

(b) Montrer que, si : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$, alors la famille $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ est libre.
On pourra compter les racines d'un polynôme bien choisi.

(c) Conclure que h est cyclique.

Problème 2 :

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

   Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$.
2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.
3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.
4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.
5. **Surjectivité de Ψ**

   Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_{+.}$.

   (b) La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

   (c) Soit $g \in \operatorname{Im}(\Psi)$.
   Montrer que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{+.}$.

   (d) A-t-on $h \in \operatorname{Im}(\Psi)$?

   (e) Conclure.
6. Montrer que Ψ est injective.
7. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

   On note $\mathcal{B} = \left(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n\right)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

   (a) **On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n\right)$ est une base de F_n**

   Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\left(\beta_j\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j = 0$. $(*)$

      i. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
      On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.

      ii. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
      Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

      iii. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

   (b) **Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

      i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\Psi(f_p)$.

      ii. Soient $a, x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_a^x t^p \ln(t)\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^x g_p(t)\mathrm{d}t$ puis celle de $\Psi(g_p)$.

      iii. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

   (c) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.