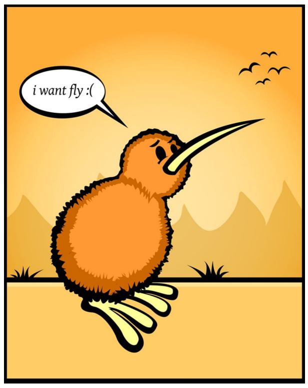
Programme de révisions :
vacances de printemps



Les corrigés et des indications sont disponibles en ligne dans la section : Révisions.

Séance 1 :

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto x(\text{Arctan}\, x)^2.$$

On pourra effectuer des intégrations par parties.

Solution : $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}(\text{Arctan}\, x)^2 - x\text{Arctan}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

Révisions de calcul de primitives.

- ☐ Reconnaître une primitive usuelle. Revoir le formulaire et refaire :
  - ∗ exemple 1 du chapitre 7,
  - ∗ exercice 6 du chapitre 7.
- ☐ Savoir faire une intégration par parties et un changement de variable. Faire :
  - ∗ exercice 1 du chapitre 17,
  - ∗ exercice 2 du chapitre 17.
- ☐ Savoir calculer une primitive d'une fraction rationnelle. Revoir III du chapitre 7 et VI du chapitre 14 et refaire :
  - ∗ exemple 13 du chapitre 7,
  - ∗ exemple 14 du chapitre 7,
  - ∗ exemple 16 du chapitre 7,
  - ∗ exercice 35 du chapitre 14.
- ☐ Faire partie B, questions 1a,b,c,d du DM9.

Faire les questions 1,2,3 du problème 1 → Espaces vectoriels et primitives

- ☐ Relire la partie sur les dictionnaires du chapitre 7 .
- ☐ Refaire les exercices 1,2 et 3 du chapitre 7.

Séance 2 :

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire :

$$l_1 = \lim \frac{n!}{n^n}.$$

2. Calculer :

$$l_2 = \lim \sqrt[n]{2+(-1)^n}.$$

Solution : $l_1 = 0$ et $l_2 = 1$

- ☐ Savoir calculer une limite faisant apparaître une intégrale. Refaire :
  - ∗ exemple 1 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 2 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 3 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 4 du chapitre 17.
- ☐ Savoir calculer des limites de sommes de Riemann. Refaire :
  - ∗ exemple 8 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 9 du chapitre 17.
- ☐ Faire partie B, questions 2, 3a,b du DM9.

Faire la question 4 du problème 1 → Calcul d'intégrales

- ☐ Relire le chapitre 14 (complexité).
- ☐ Réécrire la fonction de recherche dichotomique et refaire le calcul de sa complexité.
- ☐ Faire la partie 1 du DM2.

Séance 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$. Montrer que $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe ssi $h : x \mapsto x f(x)$ est convexe.

Solution : $g''(x) = \frac{1}{x^3} h''\left(\frac{1}{x}\right)$

- ☐ Savoir calculer une dérivée faisant apparaître une intégrale. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ calculer la dérivée de :
  - ∗ $g_1 : x \mapsto \int_x^e f(t)\,dt$,
  - ∗ $g_2 : x \mapsto \int_0^x f(t)e^t\,dt$,
  - ∗ $g_3 : x \mapsto \int_{-x}^x f(t)\,dt$,
  - ∗ $g_4 : x \mapsto \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^3} f(t)t^3\,dt$,
  - ∗ $g_5 : x \mapsto \int_1^x f(t)x\,dt$,
  - ∗ $g_6 : x \mapsto \int_1^x f(t)(x-t)^2\,dt$.
- ☐ Savoir utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. Refaire :
  - ∗ exemple 12 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 13 du chapitre 17.
- ☐ Faire partie B, questions 4,a,b,c du DM9.

Faire les questions 5,6 du problème 1 → Applications linéaires et polynômes

- ☐ Relire le chapitre 15 (algorithmes de tri).
- ☐ Réécrire les fonctions de tri à bulle, tri par insertion, tri par sélection et tri par comptage.
- ☐ Faire la partie 2 du DM2.

Séance 4 :

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$x \mapsto (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Solution : $e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{7}{24}x^2\right)+o(x^2)$.

- ☐ Savoir calculer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire. Refaire :
  - ∗ exemple 3 du chapitre 18.
- ☐ Savoir calculer le rang d'une application linéaire. Refaire :
  - ∗ exemple 4 du chapitre 18.
- ☐ Savoir calculer explicitement une projection. Refaire :
  - ∗ exercice 12 du chapitre 18.
- ☐ Savoir faire des raisonnements abstraits sur des projections. Refaire :
  - ∗ exercice 13 du chapitre 18.
- ☐ Faire partie C du DM9.

Faire questions 7,8 du problème 1 → Applications linéaires

- ☐ Relire le chapitre 11 (récursivité).
- ☐ Refaire les exercices 1 et 2 du chapitre 14.

Séance 5 :

Résoudre l'équation différentielle :

$$y''+y'+\frac{1}{2}y=\sin x.$$

Solution : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda\cos\frac{x}{2}+\mu\sin\frac{x}{2}\right)-\frac{4}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

- ☐ Revoir les propriétés des isomorphismes. Préparer :
  - ∗ exercice 17 du chapitre 18,
  - ∗ exercice 18 du chapitre 18.
- ☐ Savoir utiliser le théorème du rang. Refaire :
  - ∗ exemple 11 du chapitre 18,
  - ∗ exemple 12 du chapitre 18.
- ☐ Faire partie A, questions 1,2a,b,c du DM9.

Faire la question 1 du problème 2 → Applications linéaires et projections

- ☐ Relire rapidement les chapitres 12 et 13 (représentation des nombres).
- ☐ Refaire la question 1 de l'exercice 1 du chapitre 12.
- ☐ Relire rapidement le chapitre 16 (correction).
- ☐ Faire la partie 3 du DM2.

Séance 6 :

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sqrt[3]{\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)} - 1$$

et de :

$$v_n = \ln(\cos(e^{-n})).$$

Solution : $u_n \sim \frac{1}{3ne}$ et $v_n \sim -\frac{1}{2}e^{-2n}$

- ☐ Préparer :
  - ∗ exercice 22 du chapitre 18.
- ☐ Revoir les propriétés des formes linéaires et des hyperplans. Préparer :
  - ∗ exercice 25 du chapitre 18.
- ☐ Faire partie A, questions 3a,b,c du DM9.

Faire la question 2 du problème 2 → Projections et théorème du rang

Revoir les fonctions liées à l'arithmétique.

Refaire la question 1 de l'exercice 2 du chapitre 14.

- ☐ Refaire la question 3 de l'exercice 2 du chapitre 12.

Problème 1

Dans tout le problème, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$, T−périodique. Montrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$
3. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si f est $T-$ périodique, il en est de même pour f'.
Montrer que la réciproque est fausse.

Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt.$$

4. Déterminer $U(f)$ dans les cas particuliers suivants :
   (a) f est constante,
   (b) $f : x \mapsto e^x$,
   (c) $f : x \mapsto xe^x$,
   (d) $f : x \mapsto |x|$. On pourra faire trois cas : $x \leq 0$, $x \geq 1$ et $0 < x < 1$.
5. (a) Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que l'application U qui à $f \in \mathcal{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $U(X^k)$ est un polynôme de degré k.
   (b) Montrer que : $\forall P \in E_n$, $U(P) \in E_n$.
   On définit alors l'endomorphisme U_n par :
$$U_n : \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ P & \mapsto & U(P) \end{array}$$
   (c) Montrer que $U_n \in GL(E_n)$.
7. (a) Justifier que si f, élément de $\mathcal{E}$, est dans $\mathrm{Ker}\,(U)$, alors :
      (i) $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$
      (ii) f est périodique de période 1.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$.
   (c) On pose $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$. Montrer que $f \in \mathrm{Ker}\,(U)$.
   (d) L'endomorphisme U est-il injectif ?
8. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

Problème 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On s'intéresse à la relation suivante :

$$f \circ f = f + 2Id_E \quad (*).$$

1. Dans cette question, on étudie un cas particulier.
   On pose :
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x-z+t, -2x+z-t, -y+t, -2x-y+z) \end{array}$$
   (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
   (b) Déterminer une base de $\ker\varphi$ et une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.
   (c) Calculer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on en déduire ?
   (d) On pose $f = 3\varphi - Id_E$. Montrer que f vérifie $(*)$.
2. On revient maintenant au cas général.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(*)$. On pose :
   $$g = f - 2Id_E \text{ et } h = f + Id_E.$$
   (a) i. Montrer que $g \circ h = h \circ g = 0$.
   ii. En déduire que $\mathrm{Im}\,h \subset \ker g$ et $\mathrm{Im}\,g \subset \ker h$.
   (b) i. Montrer que $\dim(\ker g) + \dim(\ker h) \geq n$.
   ii. Montrer que $\ker g$ et $\ker h$ sont en somme directe.
   iii. Montrer que :
   $$E = \ker g \oplus \ker h.$$
   (c) Soit p la projection sur $\ker g$ parallèlement à $\ker h$, soit q la projection sur $\ker h$ parallèlement à $\ker g$.
   i. Montrer que $h = 3p$ et que $g = -3q$.
   ii. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   iii. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,
   $$f^m = 2^m p + (-1)^m q.$$