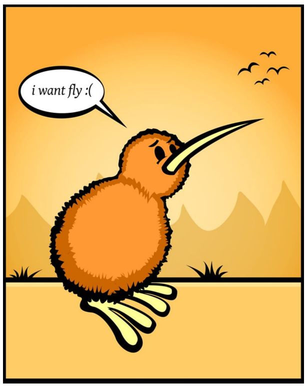
Corrections des problèmes :
vacances de printemps



Problème 1

1.
   - $0 \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$.
   - Soient $f, g \in \mathcal{E}$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme la combinaison linéaire de fonctions continues est continue, on a $lambdaf + \mu g \in \mathcal{E}$.
   - Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
2. Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,dt$. g est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

   car f est T-périodique. On a $g' = 0$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}$, $g(a) = g(0)$. D'où :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

3.
   - Supposons f T-périodique. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.
     Donc, en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$.
     Ainsi f est T-périodique.
   - Soit $f : x \mapsto x$. f est dérivable et $f' = 1$ donc f' est T-périodique. Or f n'est pas périodique.
     Ainsi, la réciproque est fausse.
4. (a) Si $f = c$, $c \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} c\,dt = c(x - (x-1)) = c = f(x).$$

   Donc :

$$U(f) = f.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} e^t\,dt = \left[e^t\right]_{x-1}^{x} = e^x - e^{x-1}.$$

   Donc :

$$U(f) : x \mapsto e^x - e^{x-1}.$$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} te^t\,dt.$$

   On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^t & v(t) = e^t \end{array}$$

   On a :

$$U(f)(x) = \left[te^t\right]_{x-1}^{x} - \int_{x-1}^{x} e^t\,dt = xe^x - (x-1)e^{x-1} - (e^x - e^{x-1}).$$

   Donc :

$$U(f) : x \mapsto (x-1)e^x - (x-2)e^{x-1}.$$

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} |t|\,dt.$$

- Si $x \leq 0$,
$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} (-t)\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{1-2x}{2}.$$
- Si $x \geq 1$,
$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{2x-1}{2}.$$
- Si $0 < x < 1$,
$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{0} (-t)\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x^2-2x+1}{2}.$$

Donc :
$$U(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-2x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-1}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{2x^2-2x+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

5. (a) Soit F une primitive de f, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = F(x) - F(x-1).$$
Donc $U(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)'(x) = f(x) - f(x-1).$$
(b)
- $\forall f \in \mathcal{E},\ U(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$.
- Soient $f, g \in \mathcal{E}$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} U(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_{x-1}^{x} (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt + \mu \int_{x-1}^{x} g)(t)\,dt \\ &= \lambda U(f)(x) + \mu U(g)(x). \end{aligned}$$
Donc : $U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$.
- Ainsi $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} U(X^k)(x) &= \int_{x-1}^{x} t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{x-1}^{x} = \frac{x^{k+1} - x^k}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j (-1)^{k+1-j}\right) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} x^j (-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

Donc :
$$U(X^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} X^j (-1)^{k-j}.$$
Ainsi $U(X^k)$ est un polynôme de degré k.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E_n$. Comme U est linéaire : $U(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k U(X^k)$.
Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U(X^k) \in E_n$, donc :
$$U(P) \in E_n.$$
(c) D'après 6.(a), $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(U_n(X^k)) = k$ donc $(U(X^k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de E_n.
Ainsi, l'image de la base canonique de E_n par U_n est une base de E_n donc :
$$U_n \in GL(E_n).$$

7. (a) (i) $f \in \ker(U)$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = 0$.
En particulier, pour $x = 1$, on a :
$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$
(ii) $f \in \ker(U)$ donc $U(f) = 0$ et ainsi $U(f)' = 0$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x-1) = 0$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x-1)$.
Ainsi : f est périodique de période 1.

(b)
- D'après la question précédente, $\ker(U) \subset \left\{f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$.
- Soit $f \in \mathcal{E}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
  Alors, d'après 2. appliquée à $a = x-1$ et $T = 1$, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

  Donc $U(f) = 0$ et $f \in \ker(U)$. Ainsi :

  $$\left\{f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\} \subset \ker(U).$$

- Donc :

  $$\ker(U) = \left\{f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}.$$

(c) On a :
- $f \in \mathcal{E}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x) = f(x)$.
  Donc f est 2π-périodique.
- $\int_0^1 f(t)\,dt = \left[\frac{\sin(2\pi t}{2\pi}\right]_0^1 = 0$.

Donc, d'après la question précédente, $f \in \ker(U)$.

(d) Comme $f \neq 0$, on a $\ker(U) \neq \{0\}$ donc U n'est pas injectif.

8. D'après 5.a, $\mathrm{Im}\,(U) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ or $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}\,(U) \neq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
   Ainsi, U n'est pas surjectif.

Problème 2

1. (a) Soient (x,y,z,t), $(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$, soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t') &= (2(\lambda x+\mu x')-(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t'),-2(\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z')-(\lambda t+\mu t'),\\ &\quad -(\lambda y+\mu y')+(\lambda t+\mu t'),-2(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'))\\ &= \lambda(2x-z+t,-2x+z-t,-y+t,-2x-y+z)\\ &\quad +\mu(2x'-z'+t',-2x'+z'-t',-y'+t',-2x'-y'+z')\\ &= \lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\varphi(x',y',z',t').\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4).$$

(b) • Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in\ker\varphi &\iff \begin{cases}2x-z+t=0\\ -2x+z-t=0\\ -y+t=0\\ -2x-y+z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2x-z+t=0\\ y=t\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}z=2x+t\\ y=t\end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$\ker\varphi=\{(x,t,2x+t,t),\ t\in\mathbb{R}\} \qquad =\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2),$$

avec $e_1=(1,0,2,0)$ et $e_2=(0,1,1,1)$.
Comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, (e_1,e_2) est une base de $\ker\varphi$.

• $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\varphi\mathrm{Vect}\,&(\varphi(1,0,0,0),\varphi(0,1,0,0),\varphi(0,0,1,0),\varphi(0,0,0,1))\\ &=\mathrm{Vect}\,((2,-2,0,-2),(0,0,-1,-1),(-1,1,0,1),(1,-1,1,0))\\ &=\mathrm{Vect}\,((0,0,-1,-1),(-1,1,0,1),(1,-1,1,0)) \quad \text{car } (2,-2,0,-2)=2(1,-1,1,0)\\ &=\mathrm{Vect}\,((0,0,-1,-1),(-1,1,0,1)) \quad \text{car } (1,-1,1,0)=-(0,0,-1,-1)-(-1,1,0,1)\\ &=\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4),\end{aligned}$$

avec $e_3=(0,0,-1,-1)$ et $e_4=(-1,1,0,1)$.
Comme e_3 et e_4 ne sont pas colinéaires, (e_3,e_4) est une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

(c) Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}\varphi\circ\varphi(x,y,z,t) &= (2(2x-z+t)-(-y+t)+(-2x-y+z),-2(2x-z+t)+(-y+t)-(-2x-y+z),\\ &\quad -(-2x+z-t)+(-2x-y+z),-2(2x-z+t)-(-2x+z-t)+(-y+t))\\ &=(2x-z+t,-2x+z-t,-y+t,-2x-y+z)\\ &=\varphi(x,y,z,t)\end{aligned}$$

Donc $\varphi\circ\varphi=\varphi$ et φ est un projecteur.

(d)

$$\begin{aligned}f\circ f &= (3\varphi-Id_E)\circ(3\varphi-Id_E)\\ &=9\varphi\circ\varphi-6\varphi+Id_E\\ &=9\varphi-6\varphi+Id_E=3\varphi+Id_E\\ &=3\varphi-Id_E+2Id_E\\ &=f+2Id_E.\end{aligned}$$

Donc f vérifie $(*)$.

2. (a) i.
- $g \circ h = (f - 2Id_E) \circ (f + Id_E) = f \circ f - f - 2Id_E = 0$,
- $h \circ g = (f + Id_E) \circ (f - 2Id_E) = f \circ f - f - 2Id_E = 0$,

Donc :

$$g \circ h = h \circ g = 0.$$

ii.
- Soit $y \in \operatorname{Im} h$, il existe $x \in \mathbb{E}$ tel que $y = h(x)$.
On a : $g(y) = g \circ h(x) = 0_E$.
Ainsi, $y \in \ker g$. Donc :

$$\operatorname{Im} h \subset \ker g.$$

- Comme g et h jouent un rôle symétrique, on a :

$$\operatorname{Im} g \subset \ker h.$$

(b) i. Comme $\operatorname{Im} h \subset \ker g$, on a : $\dim(\operatorname{Im} h) \leq \dim(\ker g)$.
Ainsi : $\dim(\operatorname{Im} h) \dim(\ker h) \leq \dim(\ker g) \dim(\ker h)$.
Or, d'après le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Im} h) \dim(\ker h) = \dim(E) = n$, donc :

$$\dim(\ker g) + \dim(\ker h) \geq n.$$

ii. Soit $x \in \ker g \cap \ker h$.
On a : $g(x) = 0_E$ et $h(x) = 0_E$ donc $f(x) = 2x$ et $f(x) = -x$. Ainsi $2x = -x$ et donc $x = 0_E$. D'où :

$$\ker g \cap \ker h = \{0_E\}.$$

iii. On a : $n \leq \dim(\ker g) + \dim(\ker h) = \dim(\ker g \oplus \ker h)$.
Donc $\dim(\ker g \oplus \ker h) = n = \dim E$, ainsi :

$$\ker g \oplus \ker = E.$$

(c) i.
- Soit $x \in \ker g$, on a $f(x) = 2x$, $p(x) = x$ et $q(x) = 0_E$.
Ainsi : $h(x) = 2x + x = 3x = 3p(x)$ et $g(x) = 2x - 2x = 0_E = -3q(x)$.
- Soit $x \in \ker h$, on a $f(x) = -x$, $p(x) = 0_E$ et $q(x) = x$.
Ainsi : $h(x) = -x + x = 0_E = 3p(x)$ et $g(x) = -x - 2x = -3x = -3q(x)$.
- Comme $\ker g \oplus \ker = E$ et $g, h, 3p, -3q \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$h = 3p \text{ et } g = -3q.$$

ii. Soit $x \in E$, $q(x) \in \operatorname{Im} q = \ker h = \ker p$ donc : $p \circ q(x) = 0_E$.
De même, par symétrie $q \circ p(x) = 0_E$. Donc :

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

iii. Soit $m \in \mathbb{N}^*$,
- On a $g + 2h = 3f$ donc $-3q + 6p = 3f$, ainsi : $f = 2p - q$.
- Comme $p \circ q = q \circ p$, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
f^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2p)^k \circ (-q)^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k (-1)^{m-k} p^k \circ q^{m-k} \\
&= (-1)^m q^m + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} 2^k (-1)^{m-k} p^{k-1} \circ p \circ q \circ q^{m-k-1} + 2^m p^m \\
&= (-1)^m q^m + 2^m p^m \quad \text{car } p \circ q = 0 \\
&= (-1)^m q + 2^m p \quad \text{car } p^2 = p \text{ et } q^2 = q.
\end{aligned}$$